

СОВРЕМЕННЫЕ  
ПРОБЛЕМЫ  
МЕХАНИКИ

---

---

*Е.А.Красильщикова*

•  
КРЫЛО  
КОНЕЧНОГО  
РАЗМАХА  
В СЖИМАЕМОМ  
ПОТОКЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1952

---

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ  
*проф. А. И. ЛУРЬЕ*  
*и проф. Л. Г. ЛОЙЦЯНСКОГО*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1952 ЛЕНИНГРАД

**Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА**

**КРЫЛО КОНЕЧНОГО РАЗМАХА  
В СЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1952 ЛЕНИНГРАД**

12-5-4

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
Введение . . . . .	9
<b>Глава I. Неустановившиеся движения крыла в сверхзвуковом потоке . . . . .</b>	<b>14</b>
§ 1. Постановка задачи . . . . .	14
§ 2. Потенциал скорости движущегося источника с переменной интенсивностью . . . . .	20
§ 3. Вывод основной формулы для потенциала скорости . . . . .	26
<b>Глава II. Установившееся движение крыла в сверхзвуковом потоке . . . . .</b>	<b>31</b>
§ 1. Основная формула для потенциала скорости при установившемся движении . . . . .	31
§ 2. Концевой эффект при установившемся движении крыла . . . . .	32
§ 3. Крыло малого удлинения . . . . .	43
§ 4. Влияние вихревой системы за крылом при установившемся движении крыла . . . . .	60
§ 5. Распределение давления на поверхности крыла . . . . .	75
§ 6. Обтекание крыла ненулевой толщины установившимся сверхзвуковым потоком . . . . .	90
§ 7. Примеры . . . . .	93
<b>Глава III. Гармонические колебания крыла в сверхзвуковом потоке . . . . .</b>	<b>113</b>
§ 1. Основная формула для потенциала скорости при гармонических колебаниях крыла . . . . .	113
§ 2. Гармонические колебания крыла бесконечного размаха . . . . .	114

§ 3. Концевой эффект. Построение и решение интегрального уравнения . . . . .	124
§ 4. Колеблущееся крыло малого удлинения . . . . .	130
§ 5. Влияние вихревой системы за крылом при гармонических колебаниях крыла . . . . .	135
§ 6. Общий случай обтекания крыла сверхзвуковым потоком . . . . .	146
§ 7. Обтекание колеблющегося крыла ненулевой толщины	154

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга является изложением работ автора по теории тонкого крыла, опубликованных в 1947—1951 гг.

Книга посвящена построению математической теории возмущённого движения сжимаемой среды, вызванного присутствием тонкого крыла, и содержит решения краевых задач исходных уравнений гидродинамики. В книге не содержится каких-либо аэродинамических характеристик крыла, так как она не является пособием по практической аэродинамике.

Мы рассматриваем установившиеся и неустойчивые движения крыла при таких обстоятельствах, когда крыло вызывает малые возмущения среды. При постановке задач используются предположения физического характера, содержащиеся в работах Л. И. Седова <sup>1)</sup> и Н. Е. Кочина <sup>2)</sup>.

Во введении вкратце излагается по этапам история развития теории крыла в сверхзвуковом потоке в линеаризированной постановке и в ссылках даётся перечень опубликованных работ различных авторов в этом направлении.

В главе I мы находим класс решений волнового уравнения, отправляясь от которых даём в квадратурах решения задач об определении потенциала скорости в неустойчившихся движениях тонкого крыла для некоторых форм в плане.

В главе II путём построения и решения интегральных уравнений получаем в квадратурах решения задач об обтекании установившимся сверхзвуковым потоком тонкого крыла,

---

<sup>1)</sup> Седов Л. И., Теория плоских движений идеальной жидкости, 1939.

<sup>2)</sup> Кочин Н. Е., Об установившихся колебаниях крыла круговой формы в плане. Прикладная математика и механика, т. VI, вып. 4, 1942.

поверхность и форма в плане которого являются произвольными, в частности, даём эффективное решение задач для крыльев малого удлинения. Далее, выводим формулы, определяющие давление на поверхности крыла в виде контурных интегралов и интегралов, распространённых по поверхности крыла; наконец, приводим примеры с целью иллюстрации общего метода.

В главе III путём построения и решения интегральных уравнений мы решаем задачи об обтекании колеблющегося крыла в сверхзвуковом потоке. Решение краевых задач представляем в виде степенных рядов для крыла произвольной формы в плане, в том числе и для крыльев малого удлинения.

Некоторые повторения, встречающиеся в тексте, объясняются желанием автора сделать возможным независимое друг от друга чтение второй и третьей главы.

Книга не претендует дать полную сводку исследований по указанному вопросу и не содержит работ других авторов. Автор преследует несравненно более скромную цель и ограничивается изложением результатов только своих работ.

Выражаю глубокую благодарность моему учителю Леониду Ивановичу Седову за ценные указания и идеи.

*Е. Красилицкова*

## ВВЕДЕНИЕ

Первыми работами теории сверхзвукового крыла явились работы Прандтля<sup>1)</sup> и Аккерета<sup>2)</sup>, относящиеся к периоду 1920—30 г.г. В этих работах исследовалась простейшая задача об установившемся движении крыла бесконечного размаха. Гармоническим колебаниям недеформируемого крыла бесконечного размаха в сверхзвуковом потоке посвящена работа Борбели<sup>3)</sup>. Частную задачу об обтекании плоского прямоугольного крыла рассмотрел Шлихтинг<sup>4)</sup>. При решении задачи он применил предложенный Прандтлем<sup>5)</sup> метод потенциала ускорений, разыскивая его в виде потенциала двойного слоя. Однако, как это было установлено позже<sup>6)</sup>,<sup>7)</sup>, Шлихтинг в своей работе допустил ошибку и вследствие этого пришёл к неправильному результату.

В. И. Смирнов<sup>8)</sup> в своей книге «Курс высшей математики» решил задачу о диффракции плоской волны, которая

---

<sup>1)</sup> J. Ackeret, Gasodynamik, Handbuch der Physik, т. VII.

<sup>2)</sup> J. Ackeret, Luftkräfte auf Flügel, die mit grösserer, als Schallgeschwindigkeit bewegt werden. Zeitschr. f. Flugt. u. Motorl., т. 16, 1928.

<sup>3)</sup> N. Borbely, Über die Luftkräfte, die auf einen harmonisch-schwingenden Zweidimensionalen Flügel bei Überschallströmung wirken, ZAMM, т. 22, № 4, 1943.

<sup>4)</sup> H. Schlichting, Tragflugtheorie bei Überschallgeschwindigkeit, Luftfahrtforschung, т. 13, № 10, 1936.

<sup>5)</sup> L. Prandtl, Theorie des Flugzeugtragflügels im zusammendruckbaren Medium. Luftfahrtforschung, т. 13, № 10, 1936.

<sup>6)</sup> Франкль Ф. И. и Карпович Е. А., Газодинамика тонких тел, 1948.

<sup>7)</sup> Фалькович С. В., О подъёмной силе крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. Прикладная математика и механика, т. X, вып. I, 1947.

<sup>8)</sup> Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, 1934.

математически равносильна задаче обтекания плоского прямоугольного крыла сверхзвуковым потоком.

Отправляясь от однородных решений волнового уравнения и используя некоторые результаты С. А. Чаплыгина<sup>1)</sup>, Буземан<sup>2)</sup> в 1943 г. предложил метод решения задач обтекания тонких тел коническим потоком. Видоизменяя этот метод, М. И. Гуревич<sup>3)</sup>-<sup>5)</sup> решил ряд аэродинамических задач для треугольного и стреловидного крыла, когда возмущённый движением крыла поток воздуха является коническим. Вопросу о подсасывающей силе стреловидного крыла посвятили совместную работу Е. А. Карпович и Ф. И. Франкль<sup>6)</sup>.

Проблему обтекания сверхзвуковым потоком крыла конечного размаха произвольной формы в плане при весьма широких предположениях поставил проф. Л. И. Сёдов на семинаре по гидромеханике в Московском университете в 1942 г. В связи с этим в 1946—1947 гг. появилась целая серия работ советских авторов по вопросам обтекания крыла конечного размаха сверхзвуковым потоком. Первой работой в этом направлении явилась наша работа<sup>7)</sup>, посвящённая обтеканию колеблющегося крыла. В этой работе нами решена пространственная задача для крыла, когда не сказывается «концевой эффект». Таким же задачам посвящены последующие

---

<sup>1)</sup> Чаплыгин С. А., О газовых струях. Собрание сочинений, т. II.

<sup>2)</sup> A. Busemann, Infinitesimale Kegelige Überschall-Strömung. Schriften der Deut. Akad. der Luftfahrtfor., № 3, 1943.

<sup>3)</sup> Гуревич М. И., О подъёмной силе стреловидного крыла в сверхзвуковом потоке. Прикладная математика и механика, т. X, вып. 4, 1946.

<sup>4)</sup> Гуревич М. И., Замечания об обтекании треугольного крыла в сверхзвуковом потоке. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 2, 1947.

<sup>5)</sup> Гуревич М. И., К вопросу о тонком треугольном крыле, движущемся со сверхзвуковой скоростью. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 3, 1947.

<sup>6)</sup> Карпович Е. А. и Франкль Ф. И., Сопротивление стреловидного крыла при сверхзвуковых скоростях. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 4, 1947.

<sup>7)</sup> Красильщикова Е. А., Возмущённое движение воздуха при вибрациях крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 1, 1947. Доклады АН СССР, т. LVI, № 6, 1947.

работы И. А. Паничкина<sup>1)</sup>, Л. А. Галина<sup>2)</sup>, С. В. Фальковича<sup>3)</sup>.

Положив в основу идею, принадлежащую Л. И. Седову, в той же работе<sup>4)</sup> мы свели задачу о концевом эффекте крыла к интегральным уравнениям.

Вопрос об обтекании крыла конечного размаха произвольной формы в плане оставался некоторое время открытым.

В начале 1947 г. стали появляться работы, в которых предлагались различные методы решения задач о концевом эффекте применительно к тем или иным частным видам форм крыла в плане. В совместной работе<sup>5)</sup> М. Д. Хаскинд и С. В. Фалькович решили задачу о гармонических колебаниях треугольного крыла, представив решение в виде ряда по специальным функциям. В дальнейшем предлагаемый ими метод был обобщён М. И. Гуревичем<sup>6)</sup>. Л. А. Галин<sup>7)</sup> дал решение задачи в рядах для прямоугольного крыла в установившемся движении. В той же работе Л. А. Галин свёл задачу определения потенциала скорости колеблющегося крыла к такой же задаче в установившемся движении и дал решение в рядах для колеблющегося крыла.

Из зарубежных работ, относящихся к этой области, были в то время известны работы Пакетта<sup>8)</sup> и Кармана<sup>9)</sup>. В этих

---

1) Паничкин И. А., О силах, действующих на колеблющийся профиль в сверхзвуковом потоке газа. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 1, 1947.

2) Галин Л. А., О крыле конечного размаха в сверхзвуковом потоке. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 3, 1947.

3) Фалькович С. В., К теории крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 3, 1947.

4) См. сноску<sup>7)</sup> на стр. 10.

5) Хаскинд М. Д. и Фалькович С. В., Колебания крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 3, 1947.

6) См. работы М. И. Гуревича, цитированные на стр. 10.

7) Галин Л. А., Крыло прямоугольной формы в плане в сверхзвуковом потоке. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 4, 1947.

8) Puckett, Supersonic wave drag of thin aerofoils. Journal of the Aeronautical Sciences, т. 13, № 9, 1946.

9) T. Karman, Supersonic aerodynamics. Journal of the Aeronautical Sciences, т. 14, № 7, 1947.

работах приводится решение задачи об обтекании установившимся потоком крыла конечного размаха с симметричным профилем и с нулевым углом атаки. Как известно, такие крылья не создают так называемого концевое эффекта и изучение возбуждаемого их движением потока воздуха не представляет математических трудностей.

В наших работах<sup>1)-5)</sup> предложен эффективный метод решения задач об обтекании крыла конечного размаха путём построения и решения интегральных уравнений, учитывающих влияние формы крыла в плане как при установившемся движении, так и при гармонических колебаниях крыла. Вводя характеристические координаты, мы решили интегральные уравнения для крыла произвольной формы в плане и представили решение задачи для установившегося движения крыла в квадратурах и для гармонических колебаний крыла в рядах по степеням частоты колебания.

В работе<sup>6)</sup> методом запаздывающих потенциалов источника рассмотрена задача для более общего вида неустановившихся движений крыла со сверхзвуковой скоростью.

Единому и последовательному изложению работ<sup>1)-6)</sup> и посвящена предлагаемая книга.

Мы ограничились перечнем опубликованных работ, относящихся к теории тонкого крыла в сверхзвуковом потоке. Более подробное изложение вопросов, связанных с аэродинамикой тонких тел, обтекаемых сжимаемым потоком, дали

---

1) Красильщикова Е. А., Влияние концевых кромок при движении крыла со сверхзвуковой скоростью. Доклады АН СССР, т. LVIII, № 4, 1947.

2) Красильщикова Е. А., Влияние концевых кромок при движении крыла с вибрациями со сверхзвуковой скоростью. Доклады АН СССР, т. LVIII, № 5, 1947.

3) Красильщикова Е. А., Влияние вихревой пелены при установившемся движении крыла со сверхзвуковой скоростью. Доклады АН СССР, т. LVIII, № 6, 1947.

4) Красильщикова Е. А., Обтекание тонких тел сверхзвуковым потоком. Учёные записки МГУ, Механика, т. IV, 1951.

5) Красильщикова Е. А., Распределение давления на несущей поверхности. Доклады АН СССР, т. LXXIX, № 5, 1951.

6) Красильщикова Е. А., К теории неустановившихся движений сжимаемой жидкости. Доклады АН СССР, т. LXXII, № 1, 1950.

Ф. И. Франкль и Е. А. Карпович в своей книге<sup>1)</sup> «Газодинамика тонких тел».

Заграничные работы, посвящённые пространственным задачам теории крыла конечного размаха с учётом концевого эффекта, стали появляться в печати только начиная с 1949 г. Наиболее существенные из этих работ — работы<sup>2)</sup>,<sup>3)</sup> Уорда. В этих работах даётся решение задачи об обтекании установившимся потоком крыла произвольной формы в плане для случая, когда крыло не является крылом малого удлинения.

---

1) См. книгу Ф. И. Франкля и Е. А. Карпович, цитированную на стр. 9.

2) G. Ward, Supersonic flow past thin wings. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, т. II, часть 2, июнь 1949.

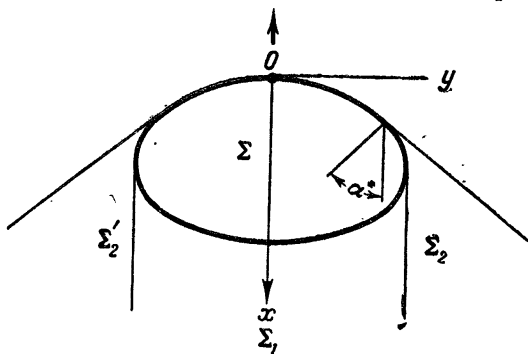
3) G. Ward, Supersonic flow past thin wings. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, т. II, часть 3, сентябрь, 1949.

---

ГЛАВА I  
НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ КРЫЛА  
В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим движение тонкого слабо изогнутого крыла с малым углом атаки в идеальной жидкости <sup>1)</sup>, <sup>2)</sup>). Будем считать, что основное движение крыла является прямолинейным поступательным движением с постоянной сверхзвуковой скоростью  $u$ . Пусть на основное движение крыла наложены малые добавочные неустановившиеся движения, в которых поверх-



Фиг. 1.

ность крыла может деформироваться. Возьмём правую систему прямолинейных прямоугольных осей координат  $Oxuz$ , перемещающихся поступательно с основной скоростью крыла  $u$ .

<sup>1)</sup> См. работу Л. И. Седова, цитированную на стр. 7.  
<sup>2)</sup> См. работу Н. Е. Кочина, цитированную на стр. 7.

Ось  $Ox$  направим противоположно движению крыла и плоскость  $xu$  возьмём так, чтобы координаты  $z$  точек крыла были малыми (фиг. 1 и 2).

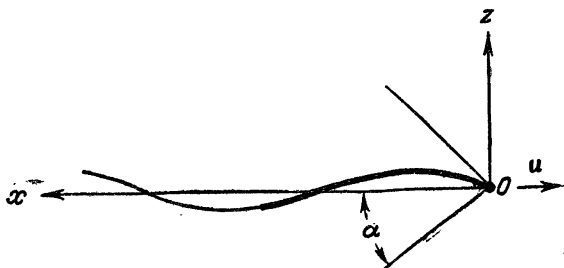
На обеих сторонах поверхности крыла нормальную составляющую скорости  $v_n$  будем считать заданной по закону

$$v_n = A_0 + A_1 f[t + \alpha]. \quad (1.1)$$

Первое слагаемое определяет поверхность крыла

$$A_0 = -u\beta_0, \quad (1.2)$$

где  $\beta_0$  — угол атаки элементов крыла. Второе слагаемое определяет добавочные неустановившиеся движения крыла. Функции  $A_0$ ,  $A_1$  и  $\alpha$  будем считать заданными в каждой точке поверхности крыла. Функция  $f$  — произвольная непрерывная и дважды дифференцируемая функция своего аргумента.



Фиг. 2.

Будем предполагать движение жидкости безвихревым и происходящим при отсутствии внешних сил. Потенциал скорости  $\varphi(x, y, z, t)$  абсолютного движения жидкости представим в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi_0(x, y, z) + \varphi_1(x, y, z, t), \quad (1.3)$$

где потенциал  $\varphi_0$  соответствует основному установившемуся движению крыла, а потенциал  $\varphi_1$  — добавочным неустановившимся движениям крыла,  $xuz$  — координаты относительно подвижных осей, движущихся поступательно вместе с крылом.

Таким образом проекции абсолютной скорости  $v$  частицы жидкости на подвижные оси координат  $Oxuz$  определяются формулами

$$v_x = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y},$$

$$v_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}.$$

Будем считать функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  и их производные малыми величинами первого порядка и пренебрегать малыми величинами второго порядка. При этих предположениях, как известно <sup>1)</sup>, <sup>2)</sup>, потенциал  $\varphi_1$  удовлетворяет волновому уравнению, которое в подвижных осях координат имеет вид <sup>3)</sup>

$$(a^2 - u^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - 2u \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} = 0, \quad (1.4)$$

а потенциал  $\varphi_0$  удовлетворяет уравнению

$$(a^2 - u^2) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = 0, \quad (1.5)$$

где  $a$  — скорость звука в невозмущенном потоке.

С поверхности крыла в сторону, противоположную его движению, сходит вихревая поверхность, называемая вихревой пеленой, на которой потенциал скорости так же, как и на самой поверхности крыла, терпит разрыв непрерывности. Проекцию вихревой пелены на плоскость  $xu$  представим как бесконечную полуполосу  $\Sigma_1$  (фиг. 1), расположенную в направлении оси  $Ox$  от задней кромки крыла до бесконечности.

Установим граничные условия, которым удовлетворяют функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ .

<sup>1)</sup> См. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начало тензорного исчисления, гл. II, 1938.

<sup>2)</sup> См. книгу Ф. И. Франкля и Е. А. Карпович, цитированную на стр. 9.

<sup>3)</sup> Уравнение (1.4) может быть получено из волнового уравнения в координатах относительно неподвижных осей

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} = 0 \quad (*)$$

преобразованием:

$$x' = x - ut; \quad y' = y; \quad z' = z.$$

Граничные условия на поверхности крыла перенесём параллельно оси  $Oz$  на проекцию  $\Sigma$  крыла на плоскость  $xu$ , что равносильно отбрасыванию малых величин второго порядка по сравнению с малыми величинами первого порядка. Таким образом, на основании заданного закона (1.1) для нормальной составляющей скорости точек поверхности крыла получаем следующие условия обтекания:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = A_0(x, y), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = A_1(x, y) f[t + \alpha(x, y)], \quad (1.6)$$

которые должны выполняться как на верхней, так и на нижней сторонах  $\Sigma$ .

На вихревой пелене должно выполняться кинематическое условие, выражающее непрерывность нормальной составляющей скорости частицы жидкости, т. е. производные  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}$  и  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$  должны оставаться непрерывными при переходе через поверхность разрыва. Так как на вихревой пелене направление нормали мало отличается от направления оси  $Oz$ , то и здесь граничные условия также перенесём параллельно оси  $Oz$  на её проекцию  $\Sigma_1$  на плоскость  $xu$ , что опять-таки сводится к отбрасыванию малых величин второго порядка. Следовательно, имеем условия:

$$\left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=+0} = \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=-0}, \quad \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]_{z=+0} = \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]_{z=-0}, \quad (1.7)$$

которые должны выполняться на  $\Sigma_1$  и выражают непрерывность  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  и  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  при переходе через  $\Sigma_1$ .

Кроме того, на вихревой пелене должно выполняться динамическое условие непрерывности давления при переходе через вихревую пелену. Выразим функцию давления

$$P = \int \frac{dp}{\rho}$$

(где  $\rho$  — плотность), пользуясь интегралом Лагранжа в подвижной системе координат

$$P = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \Gamma(t),$$

где  $\Gamma(t)$  — произвольная функция времени. Отбрасывая в этом выражении малые величины второго порядка и имея в виду представление (1.3) для потенциала скорости, получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right]_{z=+0} &= \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right]_{z=-0}, \\ \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right]_{z=+0} &= \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right]_{z=-0}, \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

которые также должны выполняться на  $\Sigma_1$ .

После того, как нами установлены граничные условия (1.6) и (1.7) с такой же степенью приближения, мы вправе считать, что поверхность разрыва потенциала скорости — вихревая пелена — целиком лежит в плоскости  $xu$ .

Функция  $\varphi$ , а следовательно, и функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  терпят разрыв на поверхности  $\Sigma$  и  $\Sigma_1$ . Это означает, что вдоль поверхностей  $\Sigma$  и  $\Sigma_1$  расположены поверхностные вихри. Направление поверхностного вихря перпендикулярно направлению вектора относительной скорости двух частиц жидкости, прилегающих к поверхности разрыва с двух её сторон. На поверхности  $\Sigma_1$ , вследствие условий (1.8) и (1.7), терпит разрыв непрерывности только производная  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ , а следовательно только производные  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}$  и  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$ , поэтому вихревые линии на  $\Sigma_1$  направлены параллельно оси  $Ox$ . Так как все вихри лежат в плоскости  $xu$ , то в двух симметричных относительно плоскости  $xu$  точках значения производных  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  и  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  будут одинаковы, а значения производных  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ , а также  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}$  и  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$  будут отличаться только знаком. Следовательно, функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  являются нечётными относительно координаты  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x, y, -z) &= -\varphi_0(x, y, z), \\ \varphi_1(x, y, -z, t) &= -\varphi_1(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Сопоставляя соотношения (1.8) и (1.9), заключаем, что функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  должны удовлетворять соответственно условиям

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \quad (1.10)$$

на поверхности  $\Sigma_1$ .

Так как движение крыла происходит со сверхзвуковой скоростью, то среда возмущена только в области, ограниченной соответствующей волной возмущения, представляющей собой поверхность, огибающую характеристические конусы с вершинами в точках контура крыла. Вне этой поверхности — впереди крыла среда покоится, следовательно, потенциал скорости сохраняет постоянное значение, которое мы принимаем равным нулю. Отсюда имеем следующие условия на волне возмущения:

$$\varphi_0(x, y, z) = 0, \quad \varphi_1(x, y, z, t) = 0. \quad (1.11)$$

Потенциалы  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  всюду вне плоской области  $\Sigma + \Sigma_1$  являются функциями непрерывными и, как установлено, нечётными относительно координаты  $z$ ; следовательно, всюду в плоскости  $xu$  вне области  $\Sigma + \Sigma_1$ , где среда возмущена, выполняются условия

$$\varphi_0(x, y, 0) = 0, \quad \varphi_1(x, y, 0, t) = 0. \quad (1.12)$$

Область, где выполняются условия (1.12), на фиг. 1 обозначена буквами  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_2'$ . Условия (1.12) вытекают из условий (1.9), если в последних положить координату  $z$  равной нулю.

Итак, рассматриваемая гидродинамическая задача сведена к следующим двум краевым задачам:

I. Найти функцию  $\varphi_1(x, y, z, t)$ , удовлетворяющую уравнению (1.4) и граничным условиям (1.6), (1.10), (1.11) и (1.12).

II. Найти функцию  $\varphi_0(x, y, z)$ , удовлетворяющую уравнению (1.5) и граничным условиям (1.6), (1.10), (1.11) и (1.12).

Так как функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  являются функциями антисимметричными относительно плоскости  $xu$ , то достаточно решить задачи для верхнего полупространства.

Из решения краевой задачи I можно получить решение краевой задачи II, если в первом решении функцию  $f$  считать постоянной величиной, равной единице, и вместо функции  $A_1$  взять функцию  $A_0$ .

## § 2. Потенциал скорости движущегося источника с переменной интенсивностью

Построим решение уравнения (1.4) как запаздывающий потенциал скорости от источника, движущегося прямолинейно с постоянной скоростью  $u$  и с изменяющейся во времени интенсивностью по произвольному закону  $f_1(t)$ .

Рассмотрим бесконечную прямую. Вообразим точку, движущуюся слева направо по этой прямой с постоянной скоростью  $u$ . В каждой точке прямой, через которую проходит воображаемая точка, возбуждается источник. Пусть в точке  $N$  этой прямой возник источник в момент времени  $t_1$  (фиг. 3), а в точке  $O'$  — в момент  $t=0$ . Каждый возникший источник продолжает действовать с переменной интенсивностью  $q$ , изменяющейся по закону  $q=f_0(t-t_1)f_1(t)$ . В любой момент времени  $t$  вся левая часть рассмотренной бесконечной прямой до некоторой точки  $O$  заполнится действующими источниками. Правая граница  $O$  этой полупрямой будет двигаться вправо с постоянной скоростью  $u$ . Аналогичную задачу рассматривал Прандтль<sup>1)</sup>, считая интенсивность источников  $q=f_0(t-t_1)$ . Закон изменения функции  $f_0$  для всех источников один и тот же, если считать начальным моментом для каждого источника момент его возникновения. Функция  $f_1$  в каждый момент времени для всех источников имеет одно и то же значение. Из определения функции  $f_0$  следует, что она имеет смысл только для положительных значений аргумента. Функция же  $f_1$  определена для любых значений аргументов. В остальном функции  $f_0$  и  $f_1$  совершенно произвольны.

Запаздывающий потенциал скорости в точке  $M(x', y', z')$ , доставляемый такой системой источников, представится в

<sup>1)</sup> См. работу Л. Прандтля за 1936 г., цитированную выше на стр. 9.

неподвижных осях координат в виде

$$\Phi_1^*(x', y', z', t) = A \int_{t_1'}^{t_1''} \frac{f_0 \left[ t - t_1 - \frac{r}{a} \right] f_1 \left[ t - \frac{r}{a} \right]}{r} dt_1, \quad (2.1)$$

где  $r = \sqrt{(x' + ut_1)^2 + y'^2 + z'^2}$  есть расстояние между точками  $M$  и  $N$ ,  $A$  — постоянная величина, имеющая размерность скорости, и  $a$  — скорость звука. Пределы интегрирования  $t_1'$  и  $t_1''$  учитывают те источники, влияние которых сказывается в точке  $M$  в момент времени  $t$ . Начало координат  $O'$  неподвижной системы  $O'x'y'z'$  помещено в такой точке пространства, в которой возник источник в момент времени  $t = 0$ .

Вводим переменную интегрирования  $\tau = a(t - t_1) - r$  и переходим к новым координатам  $x = x' + ut$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ , после чего получим

$$r = \sqrt{[x - u(t - t_1)]^2 + y^2 + z^2}.$$

Вставляя в последнее равенство  $t - t_1 = \frac{\tau + r}{a}$  и решая относительно  $r$ , найдем:

$$r = \frac{u(xa - u\tau)}{u^2 - a^2} \pm \frac{a^2}{u^2 - a^2} \sqrt{\left(x - \frac{u}{a}\tau\right)^2 - \left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right)(y^2 + z^2)}.$$

Дифференцируя равенство  $\tau = a(t - t_1) - r$ , получим:

$$d\tau = - \left[ a + \frac{x - u(t - t_1)}{r} u \right] dt_1,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{dt_1}{r} &= \frac{ad\tau}{(u^2 - a^2) \left[ r - \frac{u(ax - u\tau)}{u^2 - a^2} \right]} = \\ &= \frac{d\tau}{a \sqrt{\left(x - \frac{u}{a}\tau\right)^2 - \left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right)(y^2 + z^2)}} \end{aligned}$$

тогда выражение (2.1) преобразуется к виду

$$\Phi^*(x, y, z, t) =$$

$$= \frac{A}{a} \int_0^{\tau_1} \frac{f_0 \left[ \frac{\tau}{a} \right] f_1 \left\{ t - \frac{u [x - (u/a) \tau]}{u^2 - a^2} \mp \frac{a}{u^2 - a^2} \frac{\tilde{r}}{r} \right\}}{\tilde{r}} d\tau,$$

где

$$\tilde{r} = \sqrt{\left(x - \frac{u}{a} \tau\right)^2 - \left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right)(y^2 + z^2)}. \quad (2.2)$$

Если предположить, что  $u > a$ , то потенциал скорости в точке  $M(x, y, z)$  представится как сумма выражений (2.2) со знаком минус перед радикалом, учитывающим влияние на точку  $M$  источников отрезка  $\overline{AC}$ , и со знаком плюс, учитывающим источники отрезка  $\overline{CB}$  (фиг. 3). В качестве верхнего предела интегрирования  $\tau_1$  следует взять меньший корень уравнения

$$\left(x - \frac{u}{a} \tau\right)^2 - \left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right)(y^2 + z^2) = 0$$

для  $\tau$ . Легко видеть, что в случае сверхзвуковой скорости  $u$  оба корня являются действительными положительными величинами.

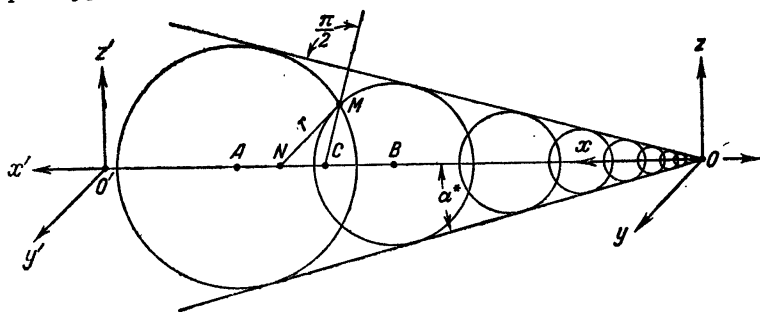
На основе выражения (2.2), которое представляет потенциал скорости рассмотренной системы источников, построим теперь потенциал скорости в точке  $M$  от одного источника, помещённого в начало координат, движущегося со скоростью  $u$  и с изменяющейся во времени интенсивностью по закону  $f_1(t)$ . Этот новый потенциал получим путём следующего предельного перехода. Помещая источник в начало координат, потенциал скорости найдём из выражения (2.2), если считать в последнем интервал интегрирования  $0\tau_1$  исчезающе малым. Тогда, пренебрегая членом  $\left(\frac{u}{a}\right)\tau$ , полагая

функцию  $f_0$  такой, что выражение  $\frac{A}{a} \int_0^{\tau_1} f_0 \left[ \frac{\tau}{a} \right] d\tau$  является постоянной величиной  $C$ , и замечая, что вывод остаётся в силе, если в выражении (2.2) под знаком функции  $f_1$  к аргу-

менту  $t$  прибавить произвольную постоянную  $\alpha_1$ , получим искомое решение уравнения (1.4) в виде

$$\begin{aligned} \varphi^*(x, y, z, t) = & \\ = C \frac{f_1 \left\{ t + \alpha_1 - \frac{ux}{u^2 - a^2} - \frac{a}{u^2 - a^2} \sqrt{x^2 - \left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right)(y^2 + z^2)} \right\}}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right)(y^2 + z^2)}} + & \\ + C \frac{f_1 \left\{ t + \alpha_1 - \frac{ux}{u^2 - a^2} + \frac{a}{u^2 - a^2} \sqrt{x^2 - \left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right)(y^2 + z^2)} \right\}}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right)(y^2 + z^2)}}. & (2.3) \end{aligned}$$

Путём непосредственной подстановки формулы (2.3) в уравнение (1.4) легко доказать, что функция  $\varphi^*$  удовлетворяет уравнению (1.4).



Фиг. 3.

В формуле (2.3) мы получили общее выражение потенциала скорости в виде двух слагаемых. Первое слагаемое отвечает потенциалу скорости, доставляемому источником в положении  $A$  (фиг. 3), второе слагаемое отвечает потенциалу скорости источника в положении  $B$ .

Если скорость движения источника  $u < a$ , то для того, чтобы получить запаздывающий потенциал движущегося источника с переменной интенсивностью в правой части формулы (2.3), следует ограничиться первым слагаемым. В самом деле, если скорость движения источника превосходит звуковую, то в каждый момент времени  $t$  в любой точке  $M$  возмущённого пространства сказывается влияние двух поло-

жений источника — положения  $A$  и  $B$  (фиг. 3). В этом случае точка  $M$  принадлежит пересечению двух сферических волн возмущения с центрами в точках  $A$  и  $B$ .

Если скорость движения источника дозвуковая, то эти сферические поверхности не пересекаются и в каждой точке возмущённого пространства сказывается влияние только одного положения источника.

Считая в формуле (2.3) функцию  $f_1$  постоянной величиной  $c_1$ , придём к решению Прандтля для запаздывающего потенциала скорости движущегося источника постоянной интенсивности.

$$\varphi_0^* = \frac{c_1}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right)(y^2 + z^2)}}.$$

Заметим, что в формуле (2.3) каждое слагаемое в отдельности при произвольной функции  $f_1$  и постоянных  $C$  и  $a_1$  также является решением уравнения (1.4). Следовательно, решение уравнения (1.4) можно представить в таком виде:

$$\varphi^* = \frac{f_1^* \{(u^2 - a^2)t - ux - r^*\}}{r^*} + \frac{f_2^* \{(u^2 - a^2)t - ux + r^*\}}{r^*}, \quad (2.4)$$

где

$$r^* = \sqrt{a^2 x^2 - (u^2 - a^2)(y^2 + z^2)}$$

и где  $f_1^*$  и  $f_2^*$  являются произвольными функциями своих аргументов. Полагая в этом решении скорость движения источника  $u$  равной нулю, придём к известному решению волнового уравнения для сферических волн.

Таким же способом можно получить и потенциал скорости источника переменной интенсивности  $f_1(t)$ , движущегося по любому закону. Например, для случая прямолинейного движения источника, когда закон движения задан в виде  $X = F_1(t)$ ,  $Y = 0$  и  $Z = 0$ , где  $F_1$  — произвольная функция времени, и когда  $\left| \frac{dF_1(t)}{dt} \right| > a$ , т. е. скорость движения источника сверхзвуковая, потенциал скорости источника, помещённого в начало координат, в координатах системы, пере-

мещающей вместе с источником, выражается формулой

$$\begin{aligned} \varphi^{**}(x, y, z, t) = & \\ = & \frac{Cf_1(t_1)}{\sqrt{[x + F_1(t) - F_1(t_1)]^2 + y^2 + z^2} - [x + F_1(t) - F_1(t_1)] \frac{dF_1(t_1)}{dt_1}} + \\ + & \frac{Cf_1(t_1^*)}{\sqrt{[x + F_1(t) - F_1(t_1^*)]^2 + y^2 + z^2} - [x + F_1(t) - F_1(t_1^*)] \frac{dF_1(t_1^*)}{dt_1^*}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где параметры  $t_1 = t_1(x, y, z, t)$  и  $t_1^* = t_1^*(x, y, z, t)$  являются действительными корнями уравнения

$$a(t - t_1) - \sqrt{[x + F_1(t) - F_1(t_1)]^2 + y^2 + z^2} = 0, \quad (2.6)$$

которое в общем случае является трансцендентным. Если

$\left| \frac{dF_1(t)}{dt} \right| < a$ , т. е. скорость движения источника дозвуковая, то для того, чтобы получить потенциал скорости, следует в выражении (2.5) ограничиться одним слагаемым, отвечающим меньшему из двух значений параметра  $t_1$  или  $t_1^*$ .

Функция выраженная формулой (2.5), удовлетворяет линейному уравнению с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \left\{ a^2 - \left[ \frac{dF_1(t)}{dt} \right]^2 \right\} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \\ - 2 \frac{dF_1(t)}{dt} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 F_1(t)}{dt^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если источник движется с постоянным ускорением по закону

$F_1(t) = -ut - \frac{bt^2}{2}$ , где  $b$  — постоянная величина, то уравнение (2.6) относительно параметра  $t_1$  является алгебраическим уравнением четвёртой степени с двумя действительными корнями.

В простейшем случае, когда источник движется с постоянной скоростью, т. е. закон движения источника задан

в виде  $F_1(t) = -ut$ , уравнение (2.6) является относительно параметра  $t_1$  квадратным уравнением с действительными корнями. Этот случай подробно исследован выше.

В частности, формула (2.5) содержит формулу Лиенара-Вихерта <sup>1)</sup>, когда интенсивность источника постоянна.

### § 3. Вывод основной формулы для потенциала скорости

Применим решение вида (2.3) волнового уравнения (1.4) к поставленной в § 1 краевой задаче. Поместим во всех точках плоскости  $xu$  источники с потенциалами  $\varphi^*$ . При этом в формуле (2.3) будем считать  $C$  и  $\alpha_1$  функциями точек названной плоскости и заменим  $\alpha_1$  на  $\alpha$  и  $f_1$  на  $f$ .

Вследствие линейности уравнения (1.4) его решением будет являться функция  $\varphi_1$ , выраженная формулой

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z, t) = & \\ = & \int \int_{S(x, y, z)} C(\xi, \eta) \frac{f\left\{t + \alpha(\xi, \eta) - \frac{u(x - \xi)}{u^2 - a^2} - \frac{a}{u^2 - a^2} \tilde{r}\right\}}{\tilde{r}} d\xi d\eta + \\ + & \int \int_{S(x, y, z)} C(\xi, \eta) \frac{f\left\{t + \alpha(\xi, \eta) - \frac{u(x - \xi)}{u^2 - a^2} + \frac{a}{u^2 - a^2} \tilde{r}\right\}}{\tilde{r}} d\xi d\eta, \quad (3.1) \end{aligned}$$

где  $k = \sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1}$ , а  $\tilde{r} = \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2(y - \eta)^2 - k^2z^2}$ .

Область интегрирования  $S(x, y, z)$  является частью плоскости  $xu$ , которая лежит внутри ветви характеристического конуса уравнения (1.4) с вершиной в точке с координатами  $x, u$  и  $z$ , расположенной в сторону потока (фиг. 4).

Решение (3.1) будет отвечать потенциалу скорости, происходящему от добавочных неустановившихся движений крыла, если функцию  $C(x, u)$  определить из краевых условий задачи на плоскости  $xu$ .

<sup>1)</sup> См. Френкель, Электродинамика, т. I, стр. 182.

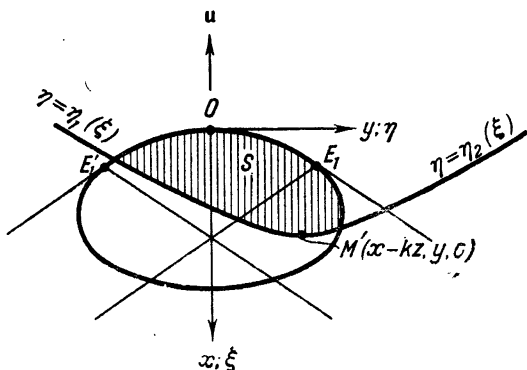
Введём в (3.1) вместо  $\eta$  новую переменную интегрирования  $\theta$  по формуле

$$\eta = y - \frac{1}{k} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} \cos \theta, \quad (3.2)$$

тогда выражение (3.1) примет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z, t) = & \int \int_{S(x, y, z)} C \left\{ \xi, y - \frac{1}{k} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} \cos \theta \right\} \times \\ & \times f \left\{ t + \alpha \left[ \xi, y - \frac{1}{k} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} \cos \theta \right] - \frac{u(x - \xi)}{u^2 - a^2} - \right. \\ & \left. - \frac{a}{u^2 - a^2} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} \sin \theta \right\} d\theta d\xi + \\ & + \int \int_{S(x, y, z)} C \left\{ \xi, y - \frac{1}{k} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} \cos \theta \right\} \times \\ & \times f \left\{ t + \alpha \left[ \xi, y - \frac{1}{k} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} \cos \theta \right] - \frac{u(x - \xi)}{u^2 - a^2} + \right. \\ & \left. + \frac{a}{u^2 - a^2} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} \sin \theta \right\} d\theta d\xi. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Заметим, что для любой точки пространства  $M(x, y, z)$  из области интегрирования  $S(x, y, z)$  всегда можно выделить



Фиг 4.

область  $S'$ , в которой переменные интегрирования изменяются в пределах

$$C' \leq \xi \leq x - kz; \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

или в прежних переменных

$$y - \frac{1}{k} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} \leq \eta \leq y + \frac{1}{k} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2}, \quad (3.4)$$

где  $C'$  — постоянная величина, удовлетворяющая неравенству  $C' < x - kz$ . В оставшейся части  $S - S'$  области  $S$  пределы интегрирования или вовсе не будут зависеть от  $z$ , или будут зависеть от  $z$  только в комбинации  $k^2 z^2$ .

Дифференцируя выражение (3.3) по параметру  $z$  и полагая в полученном выражении координату  $z = 0$ , придём к соотношению

$$C(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \{f[t + \alpha(x, y)]\}^{-1} \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]_{z=0}, \quad (3.5)$$

связывающему функцию  $C(x, y)$  с нормальной к плоскости  $xu$  производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  в любой точке плоскости  $xu$ . Таким образом, формула (3.1) устанавливает зависимость между потенциалом скорости  $\varphi_1$  в произвольной точке пространства и нормальной к плоскости  $xu$  производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$ . Сопоставляя соотношение (3.5) с условием (1.6), заключаем, что на крыле

$$C(x, y) = -\frac{1}{2\pi} A_1(x, y), \quad (3.6)$$

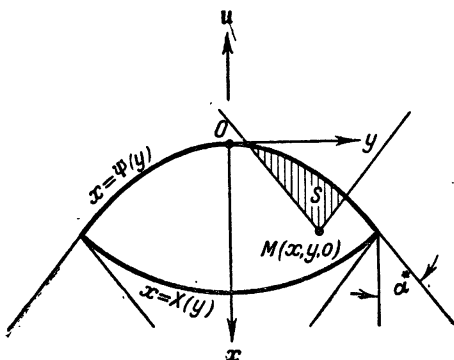
т. е. функция  $C(x, y)$  является заданной.

Следовательно, потенциал скорости  $\varphi_1$  можно вычислить по формуле (3.1), принимая во внимание (3.6), в тех точках  $M(x, y, z)$  пространства, для которых область интегрирования  $S$  не выходит за пределы крыла. В частности, формула (3.1) даёт эффективное решение задачи об определении потенциала скорости  $\varphi_1$  всюду на поверхности крыла, а также над крылом, передняя и задняя кромки которого заданы соответственно уравнениями  $x = \Psi(y)$  и  $x = X(y)$ , причём функции  $\Psi$  и  $X$  на передней и задней кромках крыла удовлетворяют условиям

$$\left| \frac{d\Psi(y)}{dy} \right| \leq \operatorname{ctg} \alpha^*, \quad (3.7)$$

$$\left| \frac{dX(y)}{dy} \right| \leq \operatorname{ctg} \alpha^*, \quad (3.8)$$

где  $\alpha^*$  — половина угла при вершине характеристического конуса. Когда выполняются условия (3.7) и (3.8), то для любой точки  $M(x, y, 0)$  поверхности крыла область интегрирования  $S$  в основной формуле (3.1) не выходит за пределы крыла, где производная  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  задана (фиг. 5).



Фиг. 5.

Так же, как частные случаи, формула (3.1) содержит решения плоских задач, если в ней функции  $C$  и  $\alpha$  считать функциями одной независимой переменной  $C = C(x)$  и  $\alpha = \alpha(x)$  и переменные интегрирования в области  $S$  считать изменяющимися в пределах

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \xi \leq x - kz, \\
 \eta_1 &= y - \frac{1}{k} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} \leq \\
 &\leq \eta \leq y + \frac{1}{k} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} = \eta_2.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Аналогичным путём может быть получена формула для потенциала скорости, когда основное движение крыла является неустановившимся, т. е. крыло движется по траектории с ускорением по заданному закону. В случае неустановившегося основного движения крыла следует отправляться от решений вида (2.5) и помещать на плоскости  $xu$  источники с потенциалами  $\varphi^{**}$ . В этом случае под знаком

двукратного интеграла в выражении для потенциала скорости будут содержаться параметры, удовлетворяющие уравнению (2.6), вид которого зависит от закона основного движения крыла.

Для того чтобы вычислить потенциал скорости по формуле (3.1) в тех точках пространства, для которых область интегрирования  $S$  выходит за пределы крыла, прежде всего необходимо из граничных условий задачи на плоскости  $xu$  определить нормальную к плоскости  $xu$  скорость  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  возмущённого потока всюду в области интегрирования  $S$ .

Задачи об определении функции  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  в плоскости  $xu$  сводятся к интегральным и интегродифференциальным уравнениям с ядрами, вид которых зависит от вида заданной функции  $f$ , т. е. от характера добавочных неустановившихся движений крыла. Эти вопросы мы подробно излагаем в следующих главах для случая установившегося движения крыла и для случая, когда добавочные неустановившиеся движения крыла являются гармоническими колебаниями.

---

ГЛАВА II  
**УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ КРЫЛА  
 В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ**

**§ 1. Основная формула для потенциала скорости  
 при установившемся движении**

Перейдём к изучению установившегося движения крыла. Считая в формуле (3.1) функцию  $f$  постоянной величиной, равной единице, и полагая на основании соотношения (3.5) функцию  $C(x, y)$  равной  $-\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=0}$ , получим основную формулу для потенциала скорости  $\varphi_0$  при установившемся движении крыла

$$\varphi_0(x, y, z) = -\frac{1}{\pi} \iint_S(x, y, z) \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=0} \times \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2 - k^2z^2}}, \quad (1.1)$$

где область интегрирования  $S$  есть часть плоскости  $xu$ , которая лежит внутри характеристического конуса уравнения (1.5) гл. I с вершиной в точке с координатами  $x, u$  и  $z$ .

Формула (1.1) устанавливает зависимость между потенциалом скорости  $\varphi_0$  в произвольной точке пространства и нормальной к плоскости  $xu$  производной  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  при установившемся движении крыла. В частности, формула (1.1) содержит результаты Прандтля <sup>1)</sup>, Аккерета <sup>2)</sup>, Шлихтинга <sup>3)</sup>, когда

<sup>1)</sup> См. работу Прандтля за 1936 г., цитированную выше на стр. 9.

<sup>2)</sup> См. работы Аккерета, цитированные выше на стр. 9.

<sup>3)</sup> См. работу Шлихтинга, цитированную выше на стр. 9.

поверхность крыла плоская и когда передняя кромка крыла является прямой линией, перпендикулярной направлению основного потока. Потенциал скорости  $\varphi_0$  можно вычислить по формуле (1.1) в тех точках пространства  $M(x, y, z)$ , для которых область интегрирования  $S$  не выходит за пределы крыла, где производная  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  задана. В частности, потенциал скорости можно вычислить по формуле (1.1) всюду на поверхности крыла, для которого выполняются условия (3.7) и (3.8) гл. I.

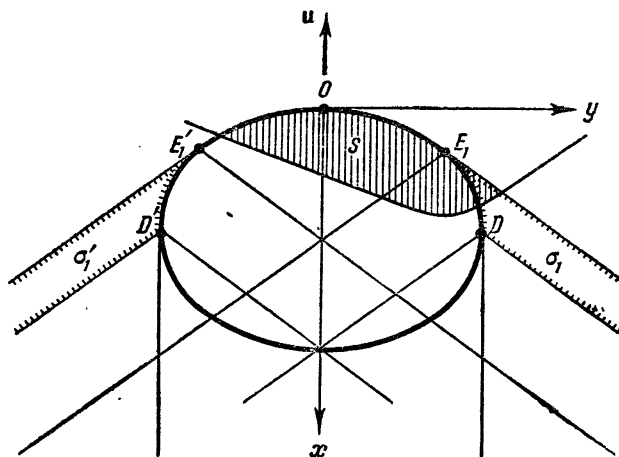
## § 2. Концевой эффект при установившемся движении крыла

Для того чтобы по формуле (1.1) вычислить потенциал скорости для тех точек  $M(x, y, z)$  пространства, для которых область интегрирования  $S$  выходит за пределы крыла, необходимо из граничных условий задачи на плоскости  $xu$  найти нормальную к плоскости  $xu$  производную  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  всюду в области интегрирования  $S$ .

Определим на контуре крыла некоторые характерные точки  $E_1, E'_1, D$  и  $D'$  (фиг. 6). Точка  $E_1$  на передней кромке крыла определяется тем, что влево от неё выполняется условие (3.7) гл. I, вправо от неё это условие нарушено. Точка  $E'_1$  определяется тем, что вправо от неё выполняется условие (3.7) и влево от неё это условие нарушено. Это означает, что в точках  $E_1$  и  $E'_1$  образующие характеристических конусов касаются контура крыла. Как следует из условия (3.7), на передней кромке крыла — дуге  $E'_1 E_1$  контура составляющая скорости, нормальная к контуру крыла, является сверхзвуковой. Точки  $D$  и  $D'$  суть соответственно крайняя правая и крайняя левая точки на контуре крыла. Дуги  $E_1 D$  и  $E'_1 D'$  контура крыла будем называть концевыми кромками крыла. Если некоторая точка  $M$  пространства расположена внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $E_1$  или  $E'_1$ , то говорят, что в точке  $M$  сказывается так называемый концевой эффект крыла. Если некоторая точка  $M$  пространства расположена внутри характеристического конуса с вер-

шиной в точке  $D$  или  $D'$ , то говорят, что на точку  $M$  влияет вихревая пелена, простирающаяся за крылом.

Рассмотрим вначале простейший случай проявления концевой эффекта. Пусть для некоторой точки  $M$  область интегрирования  $S$  в формуле (1.1) пересекается с поверхностью крыла и с областью  $\sigma_1$  (фиг. 6). Область  $\sigma_1$  — область, которая расположена справа вне крыла внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $E_1$  и вне характеристических ко-



Фиг. 6.

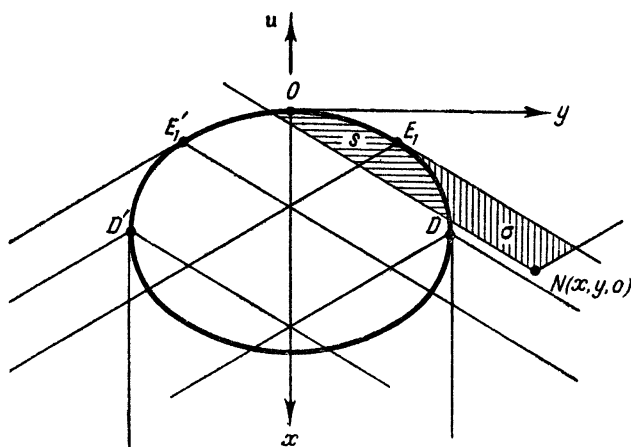
нусов с вершинами в точках  $E_1'$  и  $D$ . Ясно, что область  $\sigma_1$  принадлежит определённой выше области  $\Sigma_2$ .

Построим интегральное уравнение для функции  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}$  в области  $\sigma_1$ . Выразим по основной формуле (1.1) в произвольной точке  $N(x, y, 0)$ , расположенной в области  $\sigma_1$ , потенциал скорости  $\varphi_0$ , равный нулю всюду в области  $\Sigma_2$ , согласно условию (1.12) гл. I. Область интегрирования разобьём на две части: на области  $s$  и  $\sigma$ , как показано на фиг. 7. Область  $s$  есть часть поверхности крыла, попадающая внутрь характеристического конуса с вершиной в точке  $N$ . Область  $\sigma$  есть часть области  $\sigma_1$ , попадающая внутрь того же конуса. В области  $s$  производная  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = A_0(x, y) = -u\beta_0(x, y)$

задана. В области  $\sigma$  производная  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  является неизвестной величиной. Обозначим эту производную в области  $\sigma_1$  через  $\theta_0$ . Таким образом, мы придём к интегральному уравнению, которому удовлетворяет производная  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в области  $\sigma_1$

$$\int_{\sigma(x, y)} \int \theta_0(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2}} = - \int_{s(x, y)} \int A_0(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2}}, \quad (2.1)$$

где правая часть является известной функцией.



Фиг. 7.

Введём характеристические координаты  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$  с началом в точке  $O$  по формулам

$$x_1 = x - ky, \quad y_1 = x + ky, \quad z_1 = kz. \quad (2.2)$$

В новых координатах интегральное уравнение (2.1) существенно упрощается и принимает вид

$$\int_{\sigma(x_1, y_1)} \int \theta_1(\xi_1, \eta_1) \frac{d\eta_1 d\xi_1}{V(x_1 - \xi_1)(y_1 - \eta_1)} = \\ = - \int_s \int A(\xi_1, y_1) \frac{d\eta_1 d\xi_1}{V(x_1 - \xi_1)(y_1 - \eta_1)} = F(x_1, y_1), \quad (2.3)$$

где через  $\theta_1$  обозначена искомая производная  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z_1}$  в области  $\sigma_1$  и заданная на крыле функция  $A(x, y)$  равна:

$$A(x, y) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_1} = - \frac{u\beta_0(x, y)}{k} = - \frac{u\beta_0\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{y_1 - x_1}{2k}\right)}{k}.$$

Таким образом, правая часть  $F$  уравнения (2.3) является известной функцией.

Переменные интегрирования в области  $\sigma$  изменяются в пределах  $x_{1e} \leq \xi_1 \leq x_1$ ;  $\psi(\xi_1) \leq \eta_1 \leq y_1$ , где  $y_1 = \psi(x_1)$  — уравнение концевой кромки  $E_1D$  крыла в преобразованных координатах и  $x_{1e}$  — абсцисса точки  $E_1$  в тех же координатах. Переменная интегрирования  $\xi_1$  в области  $s$  изменяется в тех же пределах  $x_{1e} \leq \xi_1 \leq x_1$ , а переменная  $\eta_1$  в пределах  $\psi_1(\xi_1) \leq \eta_1 \leq \psi(\xi_1)$ , где  $y_1 = \psi_1(x_1)$  — уравнение передней кромки крыла — дуги  $E'_1E_1$  контура крыла. Нормальная к плоскости  $xu$  скорость  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  возмущенного потока связана с производной  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z_1}$  соотношением  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = k \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_1}$ .

Ниже в §§ 2—5 настоящей главы индекс «1» при переменных опущен. Решим двумерное интегральное уравнение (2.3) относительно функции  $\theta_1$  посредством двухкратного применения формулы обращения интегрального уравнения Абеля.

Перепишем уравнение (2.3) в виде

$$\int_{x_e}^x \frac{1}{Vx - \xi} \left\{ \int_{\psi(\xi)}^y \frac{\theta_1(\xi, \eta)}{Vy - \eta} d\eta + \int_{\psi_1(\xi)}^{\psi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta)}{Vy - \eta} d\eta \right\} d\xi = 0. \quad (2.4)$$

Это уравнение Абеля с правой частью, тождественно равной нулю. Следовательно, выражение в фигурной скобке при  $\xi = x$

равно нулю. Таким образом, уравнение (2.4) равносильно уравнению

$$\int_{\psi(x)}^y \frac{\theta_1(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = - \int_{\psi_1(x)}^{\psi(x)} \frac{A(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta, \quad (2.5)$$

которое также сводится к уравнению Абеля, если ввести новую переменную интегрирования  $\eta^* = \eta - \psi(x)$  и новый параметр  $y^* = y - \psi(x)$ . Замечая, что правая часть уравнения (2.5) при  $y = \psi(x)$  отлична от нуля, найдём решение, пользуясь известной формулой обращения интегрального уравнения Абеля<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \theta_1(x, y) = & \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y-\psi(x)}} \left[ - \int_{\psi_1(x)}^{\psi(x)} \frac{A(x, \eta)}{\sqrt{\psi(x)-\eta}} d\eta \right] - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{\psi(x)}^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\psi_1(x)}^{\psi(x)} \frac{A(x, \eta')}{\sqrt{\eta-\eta'}} d\eta' d\eta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Дифференцируя по параметру  $\eta$ , меняя порядок интегрирования и вычисляя внутреннюю квадратуру, представим решение уравнения (2.3) в виде

$$\theta_1(x, y) = - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y-\psi(x)}} \int_{\psi_1(x)}^{\psi(x)} A(x, \eta) \frac{\sqrt{\psi(x)-\eta}}{y-\eta} d\eta. \quad (2.7)$$

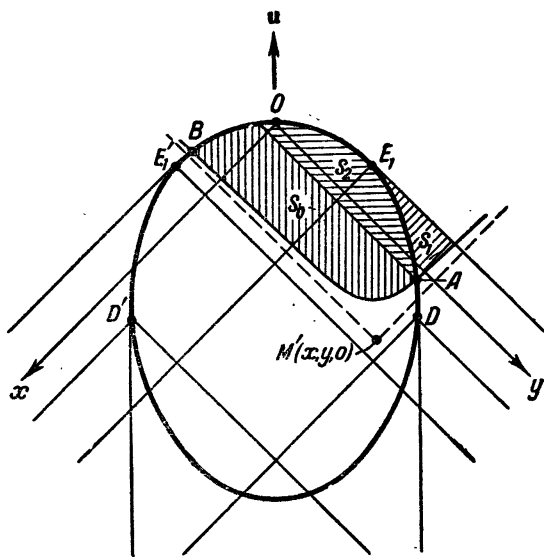
Аналогичным путём найдём значения  $\frac{\partial v_0}{\partial z} = \theta'_1(x, y)$  в области  $\sigma'_1$  (фиг. 6):

$$\theta'_1(x, y) = - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x-\bar{\psi}_2(y)}} \int_{\bar{\psi}_1(y)}^{\bar{\psi}_2(y)} A(\xi, y) \frac{\sqrt{\bar{\psi}_2(y)-\xi}}{x-\xi} d\xi, \quad (2.8)$$

где  $x = \bar{\psi}_1(y)$  и  $x = \bar{\psi}_2(y)$  — соответственно уравнения дуг  $E'_1E_1$  и  $E'_1D'$  контура крыла в виде, разрешённом относительно координаты  $x$ . Решения (2.7) и (2.8) показывают, что скорость возмущённого потока при приближении к дугам  $E_1D$  и  $E'_1D'$  контура крыла извне обращается в бесконечность, как  $r^{-1/2}$ , где  $r$  есть расстояние точки  $N$  до дуги  $E_1D$  или  $E'_1D'$  (фиг. 7).

<sup>1)</sup> См. Привалов И. И., Интегральные уравнения, 1937.

Найдём потенциал скорости по основной формуле (1.1) в точках пространства  $M(x, y, z)$ , для которых область интегрирования  $S$  пересекается с поверхностью крыла  $\Sigma$  и с областью  $\sigma_1$  (или с областью  $\sigma'_1$ ). На фиг. 8 указана проекция  $M'(x, y, 0)$  точки  $M(x, y, z)$  на плоскость  $xu$ .



Фиг. 8.

Формула (1.1) в характеристических координатах имеет вид

$$\varphi_0(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=0} \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}}. \quad (2.9)$$

Область интегрирования  $S$  в формуле (2.9) разобьём на три части  $S = s_1 + s_2 + s_0$ , как указано на фиг. 8,

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y, z) = & -\frac{1}{2\pi} \iint_{s_0+s_2} A(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} - \\ & -\frac{1}{2\pi} \iint_{s_1} \theta_1(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

В области  $s_1$  переменные интегрирования изменяются в пределах  $x_e \leq \xi \leq x_a$ ;  $\psi(\xi) \leq \eta \leq y - \frac{z^2}{x - \xi}$ , где  $x_a$  — координата точки  $A$ , которая является точкой пересечения характеристического конуса с вершиной в точке  $M$  с концевой кромкой  $E_1D$  крыла. Уравнение  $\eta = y - \frac{z^2}{x - \xi}$  есть уравнение гиперболы, которая является линией пересечения упомянутого конуса с плоскостью  $xu$ . В области  $s_2$  переменные интегрирования изменяются в пределах  $x_e \leq \xi \leq x_a$ ;  $\psi_1(\xi) \leq \eta \leq \psi(\xi)$ .

Вычислим квадратуру, распространённую по области  $s_1$ , пользуясь решением (2.7)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{s_1} \int \theta_1(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{x_e}^{x_a} \int_{\psi(\xi)}^{y - \frac{z^2}{x - \xi}} \left\{ \int_{\psi_1(\xi)}^{\psi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta') \sqrt{\psi(\xi) - \eta'}}{\sqrt{\eta - \psi(\xi)(\eta - \eta')}} d\eta' \right\} \times \\
 &\quad \times \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}}, \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

меняем порядок интегрирования по  $\eta'$  и  $\eta$

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{\pi} \int_{x_e}^{x_a} \int_{\psi_1(\xi)}^{\psi(\xi)} A(\xi, \eta') \frac{\sqrt{\psi(\xi) - \eta'}}{\sqrt{x - \xi}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \int_{\psi(\xi)}^{y - \frac{z^2}{x - \xi}} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta - \psi(\xi)(\eta - \eta')} \sqrt{y - \frac{z^2}{x - \xi} - \eta}} \right\} d\eta d\xi. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Результат вычисления внутренней квадратуры выражается в виде

$$\begin{aligned}
 I^* &= \int_{\psi(\xi)}^{y - \frac{z^2}{x - \xi}} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta - \psi(\xi)(\eta - \eta')} \sqrt{y - \frac{z^2}{x - \xi} - \eta}} = \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{\psi(\xi) - \eta'} \sqrt{y - \frac{z^2}{x - \xi} - \eta'}}. \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Подставляя значение (2.13) в выражение (2.12), получим

$$I = - \int_{s_2} \int A(\xi, \eta') \frac{d\eta' d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta')-z^2}}. \quad (2.14)$$

Сопоставляя (2.14) и (2.11), заключаем, что

$$\begin{aligned} \int_{s_1} \int \theta_1(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} = \\ = - \int_{s_2} \int A(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из (2.10) и (2.15) следует, что для вычисления потенциала скорости в точке  $M(x, y, z)$  в основной формуле (2.9) или в формуле (1.1) достаточно распространить интегрирование по области  $s_0$

$$\varphi_0(x, y, z) = - \frac{1}{2\pi} \int_{s_0} \int A(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}}. \quad (2.16)$$

Переменные интегрирования в области  $s_0$  изменяются в пределах  $x_a \leq \xi \leq x_b$ ;  $\psi_1(\xi) \leq \eta \leq y - \frac{z^2}{x-\xi}$ , где  $x_b$  — абсцисса точки пересечения характеристического конуса с вершиной в точке  $M$  с передней кромкой  $E'_1E_1$ . Результат, выраженный формулой (2.16), приводится также в работе Уорда<sup>1)</sup>.

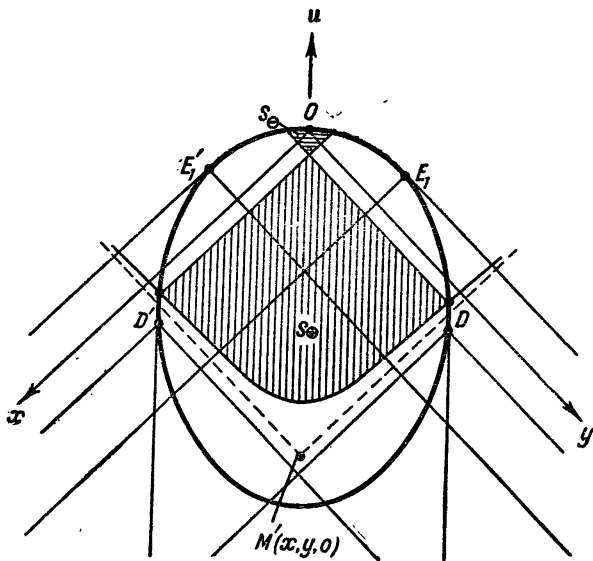
Потенциал скорости на поверхности крыла можно вычислить по формуле (2.16), положив в ней координату  $z$  равной нулю и считая переменные интегрирования изменяющимися в пределах  $x_a \leq \xi \leq x$ ;  $\psi_1(\xi) \leq \eta \leq y$ , так как в этом случае линиями пересечения характеристического конуса с вершиной в точке  $M$  с плоскостью  $xu$  являются прямые  $\xi = x$  и  $\eta = y$ .

Для того чтобы вычислить потенциал скорости в точках пространства или, в частности, на поверхности крыла, для которых область интегрирования  $S$  пересекается одновременно и с областью  $s_1$  и с областью  $s'_1$ , т. е. в точках пространства, где сказывается концевой эффект обеих концевых кромок  $E_1D$  и  $E'_1D'$  крыла, достаточно распространить интегрирование в формуле (2.9) по области  $s = s_\oplus + s_\ominus$ ,

1) См. работу Уорда, цитированную выше на стр. 13.

заштрихованной на фиг. 9, причём интеграл, распространённый по области  $s_{\Theta}$ , в формуле (2.9) следует взять с обратным знаком, т. е. со знаком плюс.

Рассмотрим крыло более общего вида, изображённое на фиг. 10, когда контур крыла не является всюду выпуклым. Пусть в передней части крыла имеется вырез — дуга  $EGG'E_1'$  контура крыла, который влияет на поток воздуха подобно



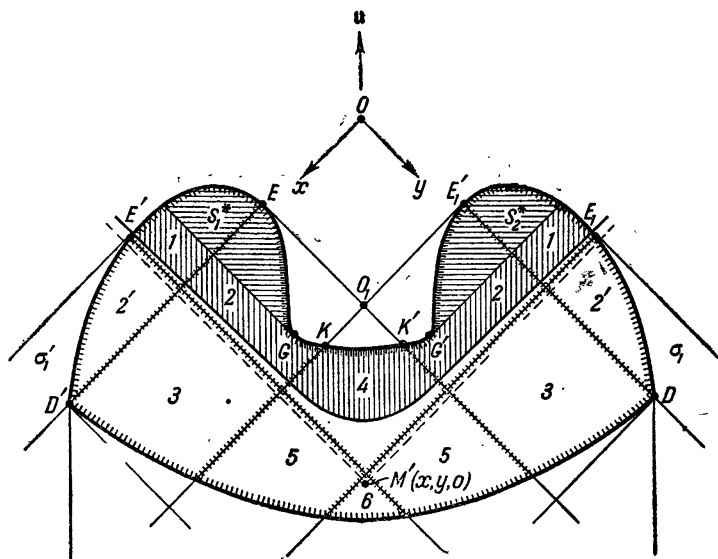
Фиг. 9.


концевым кромкам крыла. Покажем, как может быть вычислен потенциал скорости во всякой точке  $M(x, y, z)$  пространства, возмущённого движением рассматриваемого крыла, на которую не влияет вихревая пелена, сбегаящая с поверхности крыла, в том числе и в таких точках на поверхности самого крыла. Поверхность крыла разобьём на характерные области, как указано на фиг. 10.

Если область интегрирования  $S$  в основной формуле (2.9) пересекается с областями 2, 2', 3 и не пересекается с областью 4, то потенциал скорости может быть вычислен,

пользуясь формулой (2.16), как и в случаях, относящихся к фиг. 8 и 9.

Простой результат, выражаемый формулой (2.16), не имеет места в общем случае. Если область  $S$  пересекается с областью  $4$  на крыле, а следовательно, и с криволинейным треугольником  $K'O_1K$ , то согласно формуле (2.9) прежде всего



Линией  указаны границы областей 1-6

Фиг. 10.

следует определить производную  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в указанном треугольнике. Выразим в любой точке, принадлежащей треугольной области  $K'O_1K$ , по формуле (2.9) потенциал скорости, равный нулю всюду вне крыла и вне вихревой пелены за крылом, следовательно, равный нулю и в области  $K'O_1K$ . Таким образом, придём к интегральному уравнению вида (2.3) для функции  $\theta_1^* = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в области  $K'O_1K$ , но с более сложной известной функцией — правой частью уравнения. Применяя дважды

формулу обращения интегрального уравнения Абеля, придём к решению, которое представим в следующем окончательном виде:

$$\theta_1^*(x, y) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y - \psi(x)}} \int_{\psi_1(x)}^{\psi(x)} \frac{A(x, \eta) \sqrt{\psi(x) - \eta}}{y - \eta} d\eta - \\ - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x - \bar{\psi}_2(y)}} \int_{\bar{\psi}_{12}(y)}^{\bar{\psi}_2(y)} \frac{A(\xi, y) \sqrt{\bar{\psi}_2(y) - \xi}}{x - \xi} d\xi, \quad (2.17)$$

где  $y = \psi(x)$  — уравнение дуги  $EG$  контура крыла;  $y = \psi_1(x)$  — уравнение дуги  $E'E$ ;  $x = \bar{\psi}_2(y)$  — уравнение дуги  $E_1G'$  и  $x = \bar{\psi}_{12}(y)$  — уравнение дуги  $E_1E_1$ .

Подставляя решения (2.17), (2.7) и (2.8) в формулу (2.9), получим формулы для потенциала скорости в точке  $M(x, y, z)$ , проекция  $M'(x, y, 0)$  которой на плоскость  $xu$  изображена на фиг. 10 и для которой область интегрирования  $S$  пересекается с областью  $4$  на крыле, а следовательно, и с областью  $K'O_1K$  вне крыла. Формула для потенциала скорости  $\varphi_0$  имеет следующий вид:

$$\varphi_0(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{s^*(x, y, z)} A(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} + \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_{s_1} \int \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} \times \\ \times \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{[\psi^*(\xi) - \psi(\xi)][(x - \xi)(y - \eta) - z^2]}{[\psi(\xi) - \eta]\{(x - \xi)[y - \psi^*(\xi)] - z^2\}}} d\eta d\xi + \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_{s_2} \int \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} \times \\ \times \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{[\bar{\psi}^*(\eta) - \bar{\psi}_2(\eta)][(x - \xi)(y - \eta) - z^2]}{[\bar{\psi}_2(\eta) - \xi]\{(y - \eta)[x - \bar{\psi}^*(\eta)] - z^2\}}} d\xi d\eta, \quad (2.18)$$

где функции  $y = \psi^*(x)$  и  $x = \bar{\psi}^*(y)$  — уравнения дуги  $GG'$  контура крыла в виде, разрешённом соответственно относительно координаты  $y$  и  $x$ . Область  $s^*$  есть часть крыла, заштри-

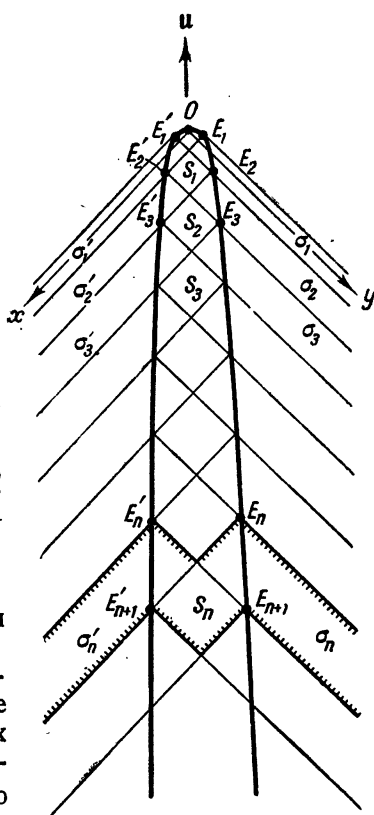
хованная на фиг. 10. Области  $s_1^*$  и  $s_2^*$  принадлежат области  $s^*$  и отмечены на той же фигуре горизонтальной штриховкой. Области  $s_1^*$  и  $s_2^*$  ограничены снизу по потоку прямыми, параллельными осям координат и проходящими через точки  $G$  и  $G'$  дуги  $EGG'E_1$  контура крыла. Точки  $G$  и  $G'$  — точки соответственно с наибольшей координатой  $x$  и  $y$  на указанной дуге.

Комбинируя результаты, выраженные формулами (2.16) и (2.18), можно найти в виде квадратур, распространённых по поверхности крыла, эффективное выражение для потенциала скорости в точках пространства, для которых область  $S$  в основной формуле пересекается с областью  $b$  или  $b$  на крыле, а следовательно, и с треугольной областью  $K'O_1K$  и с областями  $\sigma_1$  и  $\sigma_1'$  вне крыла.

### § 3. Крыло малого удлинения

Рассмотрим обтекание крыла, когда характеристические конусы с вершинами в точках  $E_1'(x_1, y_2)$  и  $E_1(x_2, y_1)$  пересекают крыло, как указано на фиг. 11. Пусть линии пересечения этих конусов с плоскостью  $xu$  многократно отражаются от концевых кромок крыла. Такое крыло в сверхзвуковой аэродинамике называют крылом малого удлинения.

Обозначим точки отражения и отметим координаты этих точек. Точки отражения обозначим буквами  $E_2(x_2, y_3)$ ,



Фиг. 11.

$E_3(x_3, y_4), \dots, E_n(x_n, y_{n+1}), \dots, E'_2(x_3, y_2), E'_3(x_4, y_3), \dots, E'_n(x_{n+1}, y_n), \dots$

Характеристические конусы с вершинами в точках  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  и в точках  $E'_1, E'_2, \dots, E'_n, \dots$  разделяют пространство, в частности плоскость  $xu$ , на ряд областей с различным аналитическим характером решения задачи. Плоскость  $xu$ , где среда возмущена, разделяется на области  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ . Область  $S_n$  есть  $M$ -образная область, расположенная внутри характеристических конусов с вершинами в точках  $E_n$  и  $E'_n$  или внутри одного из них и вне характеристических конусов с вершинами в точках  $E_{n+1}$  и  $E'_{n+1}$ . В свою очередь, часть плоскости  $xu$ , расположенная справа от крыла, разделяется на полосообразные области  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$  и часть, расположенная слева от крыла, — на полосообразные области  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n, \dots$ . Полоса  $\sigma_n$  лежит внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $E_n$  и вне конуса с вершиной в точке  $E_{n+1}$ . Таким образом,  $\sigma_n$  есть часть области  $S_n$ , расположенная справа от крыла; область  $\sigma'_n$  есть часть области  $S_n$ , расположенная слева от крыла.

Заддим переднюю кромку крыла  $E'_1E_1$  уравнением  $y = \psi_1(x)$  и концевые кромки крыла  $E_1E_{n+1}$  и  $E'_1E'_{n+1}$  соответственно уравнениями  $y = \psi(x)$  и  $y = \psi_2(x)$ ; в виде, разрешённом относительно координаты  $x$ , уравнения концевых кромок соответственно представим:  $x = \underline{\psi}(y)$  и  $x = \overline{\psi}_2(y)$ .

Для того чтобы вычислить потенциал скорости по формуле (2.9) в той части пространства или, в частности, на поверхности крыла, для точек которой область интегрирования  $S$  пересекается с областью  $S_n$ , прежде всего следует определить производную  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  вне крыла в полосах  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ , а также в полосах  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \dots, \sigma'_n$ .

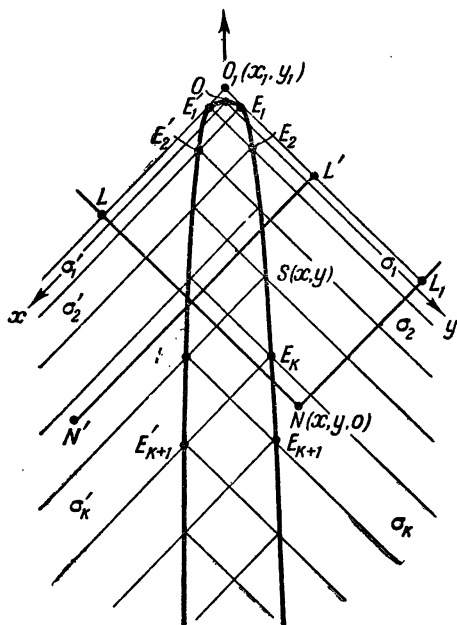
Для функции  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в произвольной полосе  $\sigma_k$  построим интегральное уравнение.

Выразим потенциал скорости, равный нулю всюду вне крыла и вне области влияния вихревой системы за крылом,

в точке  $N(x, y, 0)$ , расположенной в полосе  $\sigma_k$  (фиг. 12), по основной формуле (2.9)

$$\int_{S(x, y, z)} \int \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=0} \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} = 0. \quad (3.1)$$

Для удобства дальнейшей записи формул мы дополнили



Фиг. 12.

область  $S$  до прямоугольной, что возможно, так как впереди крыла среда не возмущена и производная  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  равна нулю. На фиг. 12 область  $S$  ограничена прямыми  $LN$ ,  $NL_1$ ,  $L_1O_1$  и  $O_1L$ . Таким образом, в области интегрирования  $S$  переменные интегрирования изменяются в пределах  $x_1 \leq \xi \leq x$  и  $y_1 \leq \eta \leq y$ .

Перепишем соотношение (3.1) в виде

$$\int_{x_1}^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} \left\{ \int_0^{\tilde{\psi}_2(\xi)} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} + \int_{\tilde{\psi}_2(\xi)}^{\psi(\xi)} A(\xi, \eta) \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} + \right. \\ \left. + \int_{\psi(\xi)}^y \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} \right\} d\xi = 0, \quad (3.2)$$

где  $y = \tilde{\psi}_2(x)$  представляет собой уравнение всей дуги  $E_1 E'_1 E'_{n+1}$  контура крыла. Функция  $\tilde{\psi}_2(x)$  определена так: для  $x_1 \leq x \leq x_2$  функция  $\tilde{\psi}_2 = \psi_1$ , для  $x \geq x_2$  функция  $\tilde{\psi}_2 = \psi_2$ .

Если производная  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  уже найдена в полосообразных областях  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k-1}$ , а следовательно, и в областях  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_{k-1}$ , то соотношение (3.2) можно рассматривать как интегральное уравнение для неизвестной функции  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в области  $\sigma_k$ . Неизвестная функция содержится в последнем интеграле выражения (3.2).

Уравнение (3.2) является уравнением Абеля с правой частью, тождественно равной нулю. Следовательно, согласно известной формуле обращения интегрального уравнения Абеля выражение в фигурной скобке при  $\xi = x$  равно нулю, и уравнение (3.2) равносильно уравнению

$$\int_{\psi(x)}^y \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = \\ = - \int_{\psi_2(x)}^{\psi(x)} A(x, \eta) \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} - \int_0^{\psi_2(x)} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}},$$

где правая часть является известной функцией. Обозначим производную  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в полосообразных областях  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots$  соответственно через  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \dots$  и в областях  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_k, \dots$  через  $\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_k, \dots$ . В соответствии

с введёнными обозначениями перепишем последнее уравнение в виде

$$\int_{\psi(x)}^y \frac{\theta_k(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = - \int_{\psi_2(x)}^{\psi(x)} \frac{A(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta - \\ - \sum_{i=1}^{i=k-2} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\theta'_i(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta - \int_{y_{k-1}}^{\psi_2(x)} \frac{\theta'_{k-1}(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) также сводится к уравнению Абеля, если ввести новую переменную интегрирования  $\eta^* = \eta - \psi(x)$  и новый параметр  $y^* = y - \psi(x)$ . Пользуясь ещё раз формулой обращения интегрального уравнения Абеля, имея при этом в виду, что правая часть уравнения (3.3) при  $y = \psi(x)$  отлична от нуля, найдём решение для функции  $\theta_k$  при  $k \geq 2$  в виде

$$\theta_k(x, y) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y-\psi(x)}} \left\{ \int_{\psi_2(x)}^{\psi(x)} \frac{A(x, \eta) \sqrt{\psi(x)-\eta}}{y-\eta} d\eta + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{i=k-2} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\theta'_i(x, \eta) \sqrt{\psi(x)-\eta}}{y-\eta} d\eta + \right. \\ \left. + \int_{y_{k-1}}^{\psi_2(x)} \frac{\theta'_{k-1}(x, \eta) \sqrt{\psi(x)-\eta}}{y-\eta} d\eta \right\}. \quad (3.4)$$

Аналогично для  $\theta'_k(x, y)$  решение получим в виде

$$\theta'_k(x, y) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x-\bar{\psi}_2(y)}} \left\{ \int_{\bar{\psi}(y)}^{\bar{\psi}_2(y)} \frac{A(\xi, y) \sqrt{\bar{\psi}_2(y)-\xi}}{x-\xi} d\xi + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{i=k-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\theta'_i(\xi, y) \sqrt{\bar{\psi}_2(y)-\xi}}{x-\xi} d\xi + \right. \\ \left. + \int_{x_{k-1}}^{\bar{\psi}(y)} \frac{\theta'_{k-1}(\xi, y) \sqrt{\bar{\psi}_2(y)-\xi}}{x-\xi} d\xi \right\}. \quad (3.5)$$

Член, содержащий сумму, в формулах (3.4) и (3.5) определён только для  $k \geq 3$ .

Итак, если функции  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}$ , а следовательно, и функции  $\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_{k-1}$  в полосах  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_{k-1}$  уже определены, то по формуле (3.4) можно вычислить  $\theta_k$  в полосе  $\sigma_k$  для любого номера  $k$ . Значения производной  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в полосах  $\sigma_1$  и  $\sigma'_1$  определены решениями (2.7) и (2.8). Значение производной  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в полосе  $\sigma_2$  найдём из решения (3.4) в виде

$$\begin{aligned} \theta_2(x, y) = & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y-\psi(x)}} \int_{\psi_2(x)}^{\psi(x)} A(x, \eta) \frac{\sqrt{\psi(x)-\eta}}{y-\eta} d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{y-\psi(x)}} \int_{y_1}^{\psi_2(x)} \int_{\bar{\psi}_1(\eta)}^{\bar{\psi}_2(\eta)} A(\xi, \eta) \frac{\sqrt{\psi(x)-\eta} \sqrt{\bar{\psi}_2(\eta)-\xi}}{(y-\eta)(x-\xi) \sqrt{x-\bar{\psi}_2(\eta)}} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Соответственно значения  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в полосе  $\sigma'_2$  найдём из (3.5) в виде

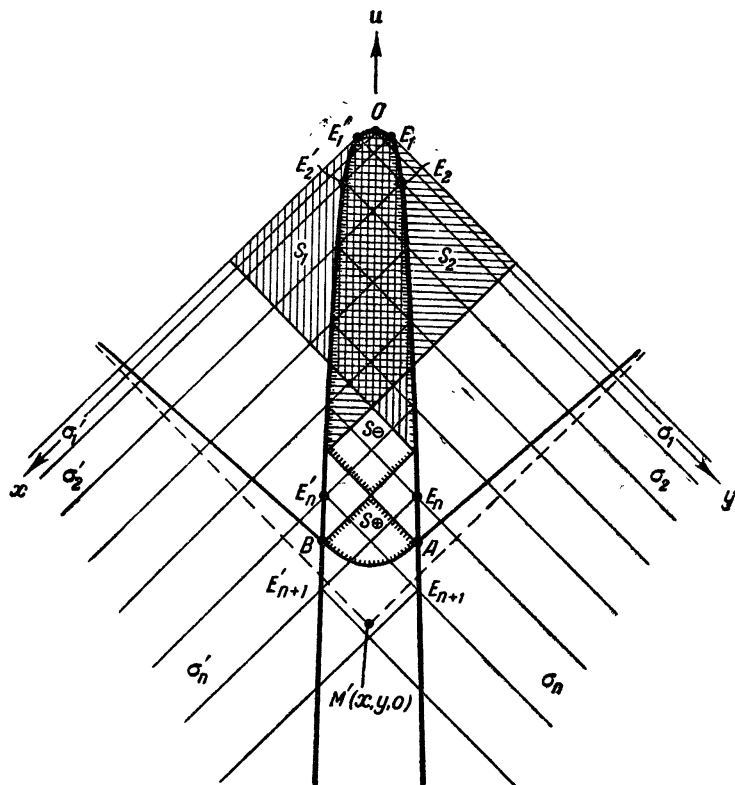
$$\begin{aligned} \theta'_2(x, y) = & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x-\bar{\psi}_2(y)}} \int_{\bar{\psi}(y)}^{\bar{\psi}_2(y)} A(\xi, y) \frac{\sqrt{\bar{\psi}_2(y)-\xi}}{x-\xi} d\xi + \\ & + \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x-\bar{\psi}_2(y)}} \int_{x_1}^{\bar{\psi}(y)} \int_{\psi_1(\xi)}^{\psi(\xi)} A(\xi, \eta) \frac{\sqrt{\bar{\psi}_2(y)-\xi} \sqrt{\psi(\xi)-\eta}}{(x-\xi)(y-\eta) \sqrt{y-\psi(\xi)}} d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, шаг за шагом можно вычислить производную  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в полосе  $\sigma_k$ .

Пользуясь решением (3.4), докажем соотношение

$$\Omega = \int_{x_1^*}^{x_2^*} \int_{y_1}^{y-\frac{z^2}{x-\xi}} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} = 0, \quad (3.8)$$

где  $x_1^*$  и  $x_2^*$  — любые числа, удовлетворяющие неравенствам  $x_1 \leq x_1^* < x_a$  и  $x_1 < x_2^* \leq x_a$ . Число  $x_a$  — координата точки  $A$ ,



Линией — отмечена граница областей  $S_n$  и  $S_{n+1}$  на крыле

Фиг. 13.

изображённой на фиг. 13. Точка  $A$  — точка пересечения характеристического конуса с вершиной в точке  $M(x, y, z)$  с концевой кромкой  $E_1 E_{n+1}$  крыла. Для доказательства

выпишем выражение для  $\Omega$  в развёрнутом виде

$$\begin{aligned} \Omega = & \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{\psi(\xi)}^{y - \frac{z^2}{x-\xi}} \frac{\theta_k(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} + \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{\psi_2(\xi)}^{\psi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} + \\ & + \sum_{i=1}^{i=k-2} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\theta'_i(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} + \\ & + \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{y_{k-1}}^{\psi_2(\xi)} \frac{\theta'_{k-1}(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}}, \quad (3.9) \end{aligned}$$

куда в первый из интегралов вместо функции  $\theta_k$  подставим её значение, согласно решению (3.4)

$$\begin{aligned} \Omega = & -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{\psi_2(\xi)}^{\psi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta') \sqrt{\psi(\xi) - \eta'}}{\sqrt{x-\xi}} I^* d\eta' d\xi - \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{i=k-2} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\theta'_i(\xi, \eta') \sqrt{\psi(\xi) - \eta'}}{\sqrt{x-\xi}} I^* d\eta' d\xi - \\ & - \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{y_{k-1}}^{\psi_2(\xi)} \frac{\theta'_{k-1}(\xi, \eta') \sqrt{\psi(\xi) - \eta'}}{\sqrt{x-\xi}} I^* d\eta' d\xi + \\ & + \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{\psi_2(\xi)}^{\psi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} + \sum_{i=1}^{i=k-2} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\theta'_i(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} + \\ & + \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{y_{k-1}}^{\psi_2(\xi)} \frac{\theta'_{k-1}(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}}, \quad (3.10) \end{aligned}$$

где через  $I^*$  обозначена вычисленная ранее квадратура (2.13). Легко видеть, что в правой части выражения (3.10) все члены попарно исключаются. Следовательно, соотношение (3.8) доказано.

Очевидно, имеет место также аналогичное соотношение

$$\int_{y_1^*}^{y_2^*} \int_{x_1}^{x - \frac{z^2}{y - \eta}} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} = 0, \quad (3.11)$$

где  $y_1^*$  и  $y_2^*$  — любые числа, удовлетворяющие неравенствам  $y_1 \leq y_1^* < y_b$  и  $y_1 < y_2^* \leq y_b$ , число  $y_b$  — координата точки  $B$ , изображённой на фиг. 13.

Точка  $B$  есть точка пересечения характеристического конуса с вершиной в точке  $M(x, y, z)$  с концевой кромкой  $E_1'E_{n+1}'$  крыла.

Пользуясь тем же решением (3.4), докажем соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{x_1^*}^{x_2^*} \int_{\psi(\xi)}^{y^*} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} = \\ & = -\frac{2}{\pi} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \int_{y_1}^{\psi(\xi)} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} \times \\ & \times \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{[(x - \xi)(y - \eta) - z^2][y^* - \psi(\xi)]}{[(x - \xi)(y - y^*) - z^2][\psi(\xi) - \eta]}} d\eta d\xi, \quad (3.12) \end{aligned}$$

где величина  $y^*$  может зависеть от  $\xi$  и удовлетворяет неравенству  $\psi(\xi_1^*) < y^* < y - \frac{z^2}{x - \xi}$ . Левую часть доказываемого соотношения обозначим через  $L_1$ , а правую часть через  $L_2$ .

В выражение для  $L_1$  подставим вместо функции  $\theta_k$  её значение согласно решению (3.4):

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{\psi(\xi)}^{y^*} \frac{\theta_k(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{\psi(\xi)}^{y^*} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\eta-\psi(\xi)}} \int_{\psi_2(\xi)}^{\psi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta') \sqrt{\psi(\xi)-\eta'}}{\eta-\eta'} d\eta' + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{\eta-\psi(\xi)}} \sum_{i=1}^{i=k-2} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\theta'_i(\xi, \eta') \sqrt{\psi(\xi)-\eta'}}{\eta-\eta'} d\eta' + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\eta-\psi(\xi)}} \int_{y_{k-1}}^{\psi_2(\xi)} \frac{\theta'_{k-1}(\xi, \eta') \sqrt{\psi(\xi)-\eta'}}{\eta-\eta'} d\eta' \right\} d\eta d\xi,
 \end{aligned}$$

или после перемены порядка интегрирования по  $\eta$  и  $\eta'$

$$\begin{aligned}
 L_1 &= -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{\psi_2(\xi)}^{\psi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta') \sqrt{\psi(\xi)-\eta'}}{\sqrt{x-\xi}} I^{**} d\eta' d\xi - \\
 &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{i=k-2} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\theta'_i(\xi, \eta') \sqrt{\psi(\xi)-\eta'}}{\sqrt{x-\xi}} I^{**} d\eta' d\xi - \\
 &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{y_{k-1}}^{\psi_2(\xi)} \frac{\theta'_{k-1}(\xi, \eta') \sqrt{\psi(\xi)-\eta'}}{\sqrt{x-\xi}} I^{**} d\eta' d\xi, \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

где через  $I^{**}$  обозначена внутренняя квадратура

$$I^{**} = \int_{\psi(\xi)}^{y^*} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta-\psi(\xi)}(\eta-\eta') \sqrt{y-\frac{z^2}{x-\xi}-\eta}}.$$

Результат вычисления этой квадратуры выражается в виде

$$I^{**} = \frac{2}{\sqrt{\psi(\xi) - \eta} \sqrt{y - \frac{z^2}{x - \xi} - \eta'}} \times \\ \times \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{[y^* - \psi(\xi)] [(y - \eta')(x - \xi) - z^2]}{[\psi(\xi) - \eta'] [(y - y^*)(x - \xi) - z^2]}}. \quad (3.14)$$

Обратимся к выражению для  $L_2$  и запишем его в развёрнутом виде согласно принятым нами обозначениям для производной  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в различных областях

$$L_2 = -\frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{\psi_2(\xi)}^{\psi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} \operatorname{arctg} \Omega_1^* d\eta d\xi - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{i=k-2} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\theta'_i(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} \operatorname{arctg} \Omega_1^* d\eta d\xi - \\ - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{y_{k-1}}^{\psi_2(\xi)} \frac{\theta'_{k-1}(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} \operatorname{arctg} \Omega_1^* d\eta d\xi, \quad (3.15)$$

где

$$\Omega_1^* = \sqrt{\frac{[(x - \xi)(y - \eta) - z^2][y^* - \psi(\xi)]}{[\psi(\xi) - \eta][(x - \xi)(y - y^*) - z^2]}}.$$

Сопоставляя выражения (3.15) и (3.13), заключим, что  $L_1$  совпадает с  $L_2$ . Следовательно, соотношение (3.12) доказано. Очевидно, имеет место также и аналогичное соотношение

$$\int_{y_1^*}^{y_2^*} \int_{\bar{\psi}_2(\eta)}^{\alpha^*} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} = \\ = -\frac{2}{\pi} \int_{y_1^*}^{y_2^*} \int_{\alpha_1^*}^{\bar{\psi}_2(\eta)} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} \operatorname{arctg} \Omega_2^* d\xi d\eta, \quad (3.16)$$

где

$$\Omega_2^* = \sqrt{\frac{[(x-\xi)(y-\eta)-z^2][x^*-\bar{\psi}_2(\eta)]}{[(x-x^*)(y-\eta)-z^2][\bar{\psi}_2(\eta)-\xi]}}$$

причем величина  $x^*$  может зависеть от  $\eta$  и удовлетворяет неравенству  $\bar{\psi}_2(\eta_1^*) < x^* < x - \frac{z^2}{y-\eta}$ .

Соотношения (3.11) и (3.16) могут соответственно быть получены из соотношений (3.8) и (3.12), если в последних поменять ролями координаты.

Заметим, что результат однократного применения формулы обращения интегрального уравнения Абеля непосредственно к уравнению (3.1) даёт

$$\int_{LN} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = 0. \quad (3.17)$$

Меняя ролями координаты в выражении (3.17), получим

$$\int_{L'N'} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} = 0. \quad (3.18)$$

Выражения (3.17) и (3.18) можно рассматривать как соотношения, выполняющиеся вдоль характеристических линий  $LN$  и  $L'N'$  в плоскости  $xu$ , где  $u$  и  $x$  являются соответственно координатами точки  $N$  или  $N'$ , расположенной вне крыла и вне области влияния вихревой системы за крылом (фиг. 12). Точка  $N$  лежит справа вне крыла; точка  $N'$  — слева вне крыла. Эти соотношения могут быть полезными при вычислениях.

Обратимся к основной формуле (2.9). Пользуясь соотношениями (3.8), (3.11), (3.12) и (3.16), получим расчётную формулу для потенциала скорости  $\varphi_0$  в точке  $M(x, y, z)$ , для которой область интегрирования  $S$  пересекается с областью  $S_n$  для любого номера  $n > 0$  (фиг. 13)

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y, z) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{s_{\oplus}} \int \frac{A(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} + \frac{1}{2\pi} \int_{s_{\ominus}} \int \frac{A(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} - \\ & - \frac{1}{\pi^2} \int_{s_1^*} \int \frac{A(\xi, \eta) \Omega_1 d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} - \frac{1}{\pi^2} \int_{s_2^*} \int \frac{A(\xi, \eta) \Omega_2 d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{k=n-3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{\psi(\xi)}^{\psi_2(x_a)} \frac{\theta_k(\xi, \eta) \Omega_2 d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} - \\
& - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{k=n-3} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \int_{\bar{\psi}_2(\eta)}^{\bar{\psi}(y_b)} \frac{\theta'_k(\xi, \eta) \Omega_1 d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} - \\
& - \frac{1}{\pi^2} \int_{x_{n-2}}^{\bar{\psi}[\psi_2(x_a)]} \int_{\psi(\xi)}^{\psi_2(x_a)} \frac{\theta_{n-2}(\xi, \eta) \Omega_2 d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} - \\
& - \frac{1}{\pi^2} \int_{y_{n-2}}^{\psi_2[\bar{\psi}(y_b)]} \int_{\bar{\psi}_2(\eta)}^{\bar{\psi}(y_b)} \frac{\theta'_{n-2}(\xi, \eta) \Omega_1 d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}}, \quad (3.19)
\end{aligned}$$

где функции  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  определены в виде

$$\Omega_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{[(x-\xi)(y-\eta)-z^2][y_b-\psi(\xi)]}{[(x-\xi)(y-y_b)-z^2][\psi(\xi)-\eta]}}$$

$$\Omega_2 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{[(x-\xi)(y-\eta)-z^2][x_a-\bar{\psi}_2(\eta)]}{[(x-x_a)(y-\eta)-z^2][\bar{\psi}_2(\eta)-\xi]}}$$

и области  $s_{\oplus}$  и  $s_{\ominus}$  — области крыла, отмеченные на фиг. 13. Область  $s_1^*$  — область на поверхности крыла, заштрихованная вертикальной штриховкой. Область  $s_2^*$  — область на поверхности крыла, заштрихованная горизонтальной штриховкой (буквы  $s_1^*$  и  $s_2^*$  не представлены на фиг. 13). Очевидно области  $s_1^*$  и  $s_2^*$  пересекаются друг с другом и с областью  $s_{\oplus}$  на крыле. Область  $s_1$  лежит вне крыла и на фиг. 13 заштрихована вертикальной штриховкой. Эта область представляет собой сумму областей, по которой в формуле (3.19) распространены интегралы, содержащие функцию  $\theta'_k$  для  $k = 1, 2, \dots, n-2$ . Область  $s_2$  лежит вне крыла и на той же фигуре заштрихована горизонтальной штриховкой. По ней распространены все интегралы, в совокупности содержащие функцию  $\theta_k$  для  $k = 1, 2, \dots, n-2$ .

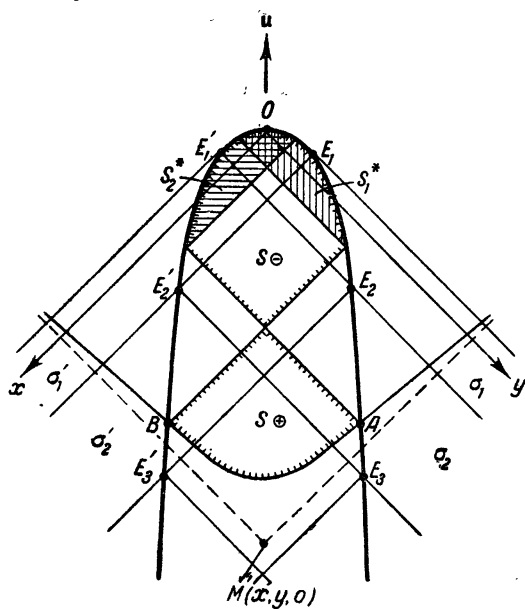
Если точка  $M$  такова, что область интегрирования  $S$  в основной формуле пересекается с той частью области  $S_n$ , которая расположена внутри характеристического конуса с вершиной в  $E_n$  и вне конуса с вершиной в  $E'_n$ , то в формуле (3.19) во второй сумме и в последнем члене вместо  $n$  следует положить  $n-1$ . Если же область интегрирования  $S_n$

пересекается с той частью области  $S_n$ , которая расположена внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $E'_n$  и вне конуса с вершиной в  $E_n$ , то в формуле (3.19) в первой сумме и в предпоследнем члене вместо  $n$  следует положить  $n-1$ .

Заметим, что суммы в формуле (3.19) определены для  $n > 3$ , а последние два члена в формуле (3.19) определены для  $n \geq 3$ . Если  $n=1$ , то в формуле (3.19) для потенциала скорости

следует ограничиться первыми двумя членами. Этот результат был уже получен нами в предыдущем параграфе. Если  $n=2$ , то в формуле (3.19) следует ограничиться первыми четырьмя членами (фиг. 14).

Итак, чтобы вычислить потенциал скорости по формуле (3.19) в точке  $M(x, y, z)$ , проекция  $M'(x, y, 0)$  которой изображена на фиг. 13, необходимо прежде всего вычислить функции  $\theta_k$  по формуле (3.4) для  $k \geq 2$  и по формуле (2.7) для  $k=1$ ; а также вычислить функции  $\theta'_k$  по формуле (3.5) для  $k \geq 2$  и по формуле (2.8) для  $k=1$ .



Фиг. 14.

Как пример приведём выражение для потенциала скорости  $\varphi_0$  в развёрнутом виде для точки  $M(x, y, z)$ , когда область интегрирования  $S$  пересекается с областью  $S_3$  и не пересекается с областью  $S_4$ , то-есть при  $n = 3$  (фиг. 11)

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y, z) = & \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_{s_{\oplus}} \int \frac{A(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} + \frac{1}{2\pi} \int_{s_{\ominus}} \int \frac{A(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} - \\ & - \frac{1}{\pi^2} \int_{s_1^*} \int \frac{A(\xi, \eta) \Omega_1 d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} - \frac{1}{\pi^2} \int_{s_2^*} \int \frac{A(\xi, \eta) \Omega_2 d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi^3} \int_{y_2} \int_{x_1} \int_{\psi_1(\xi)}^{\psi_2(x_a) \bar{\psi}(\eta) \psi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta') \sqrt{\psi(\xi) - \eta'} \Omega_2}{\sqrt{\eta - \psi(\xi)} (\eta - \eta') \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} d\eta' d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi^3} \int_{x_2} \int_{y_1} \int_{\bar{\psi}_1(\eta)}^{\bar{\psi}(y_b) \psi_2(\xi) \bar{\psi}_2(\eta)} \frac{A(\xi', \eta) \sqrt{\bar{\psi}_2(\eta) - \xi'} \Omega_1}{\sqrt{\xi - \bar{\psi}_2(\eta)} (\xi - \xi') \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} d\xi' d\eta d\xi. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Областями интегрирования в последних двух квадратурах по  $\xi$  и  $\eta$  являются соответственно области  $s_1$  и  $s_2$ , расположенные вне крыла и отмеченные на фиг. 15 штриховкой.

В трёхкратных интегралах меняем порядки интегрирования: в первом интеграле по  $\eta'$  и  $\eta$ , во втором интеграле по  $\xi'$  и  $\xi$ . После этих операций формулу (3.20) запишем в виде

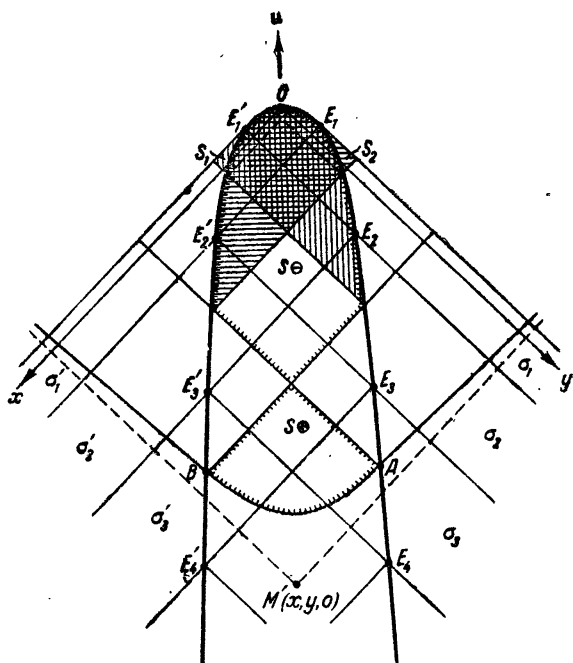
$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y, z) = & \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_{s_{\oplus}} \int \frac{A(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} + \frac{1}{2\pi} \int_{s_{\ominus}} \int \frac{A(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} - \\ & - \frac{1}{\pi^2} \int_{s_1^*} \int \frac{A(\xi, \eta) \Omega_1 d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} - \frac{1}{\pi^2} \int_{s_2^*} \int \frac{A(\xi, \eta) \Omega_2 d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi^3} \int_{s_1^{**}} \int \int A(\xi, \eta') \Omega_1^{**} d\eta' d\xi + \frac{1}{\pi^3} \int_{s_2^{**}} \int \int A(\xi', \eta) \Omega_2^{**} d\xi' d\eta, \quad (3.21) \end{aligned}$$

где

$$\Omega_1^{**} = \int_{\psi(\xi)}^{\psi_2(\infty \alpha)} \frac{\sqrt{\psi(\xi) - \eta'} \Omega_2}{\sqrt{\eta - \psi(\xi)} (\eta - \eta') \sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} d\eta,$$

$$\Omega_2^{**} = \int_{\psi_2(\eta)}^{\bar{\psi}(y_b)} \frac{\sqrt{\bar{\psi}_2(\eta) - \xi'} \Omega_1}{\sqrt{\xi - \bar{\psi}_2(\eta)} (\xi - \xi') \sqrt{(x - \xi)(y - \eta) - z^2}} d\xi.$$

Области интегрирования  $s_1^{**}$  и  $s_2^{**}$  — области на поверхности крыла, ограниченные снизу пунктирными линиями (фиг. 15).



Фиг. 15.

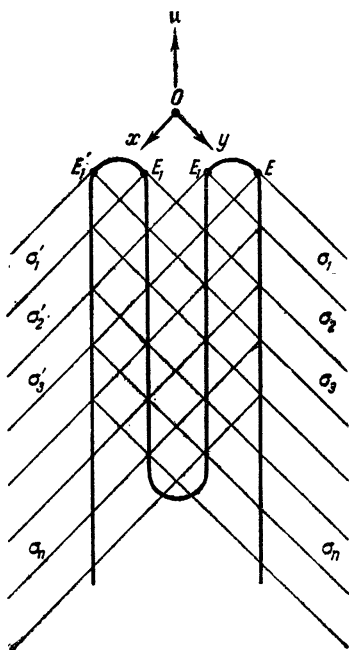
Эти области могут пересекаться на крыле, что указано на фигуре, или могут не пересекаться на крыле. В областях  $s_1^{**}$  и  $s_2^{**}$  переменные интегрирования изменяются соответ-

ственно в пределах  $\psi_1(\xi) \leq \eta' \leq \psi(\xi)$ ,  $x_1 \leq \xi \leq \bar{\psi}[\psi_2(x_a)]$  и  $\bar{\psi}_1(\eta) \leq \xi' \leq \bar{\psi}_2(\eta)$ ,  $y_1 \leq \eta \leq \psi_2[\bar{\psi}(y_b)]$ .

Если функции  $\psi$  и  $\psi_2$  фиксировать, то-есть рассмотреть крыло со вполне определёнными концевыми кромками, то внутренние квадратуры  $\Omega_1^{**}$  и  $\Omega_2^{**}$  в последних двух членах формулы (3.21) могут быть вычислены, следовательно, формула (3.21) будет содержать только двойные интегралы, распространённые по поверхности крыла.

В общем случае в расчётной формуле (3.19) содержатся двойные интегралы, распространённые по поверхности крыла, и интегралы кратности  $k+2$ , где  $k$  принимает все значения  $k=1, 2, \dots, n-2$ . Легко видеть, что путём перемены порядков интегрирования каждый из интегралов кратности  $k+2$  преобразуется к виду, когда в нём под знаком внутренней квадратуры кратности  $k$  не содержится произвольно задаваемая функция  $A$ , а содержатся произвольно задаваемые функции  $\psi$  и  $\psi_2$ , определяющие вид крыла в плане. Если функции  $\psi$  и  $\psi_2$  задать конкретно, то эти внутренние квадратуры кратности  $k$  могут быть вычислены. Следовательно, расчёт потенциала скорости по формуле (3.19) и в общем случае сводится к вычислению двойных интегралов, распространённых по поверхности крыла, под знаком которых содержится произвольно задаваемая функция  $A$ , определяющая форму поверхности крыла и угол атаки.

Все результаты остаются в силе, когда передняя кромка  $E_1'E_1$  крыла задана не одним уравнением  $y = \psi_1(x)$ , а состоит из отрезков гладких кривых, заданных различными уравнениями,



Фиг. 16.

а также когда и каждая из концевых кромок  $E_1 E_{n+1}$  и  $E'_1 E'_{n+1}$  крыла состоит из отрезков гладких кривых. Если контур крыла состоит из отдельных гладких кривых, заданных различными уравнениями, в частности, является кусочно-гладким, то число полособразных областей типа  $\sigma_n$  с различным аналитическим характером решения для производной  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  увеличится за счёт угловых точек или точек сопряжения отдельных кривых, образующих контур крыла.

Рассмотрим крыло малого удлинения, когда в передней части крыла имеется вырез, как показано на фиг. 16.

Производную  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в полосах  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  можно вычислить по формулам (2.7) и (3.4). В полосе  $\sigma_3$  уже нельзя вычислить производную  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$ , пользуясь формулой (3.4), а следует снова построить двумерное интегральное уравнение, которое также будет сводиться к двум уравнениям Абеля, но с более сложными правыми частями, нежели это имело место для области  $\sigma_3$ , относящейся к фиг. 11.

#### § 4. Влияние вихревой системы за крылом при установившемся движении крыла

При изучении влияния вихревой пелены на возмущённый движением крыла поток воздуха удобно строить решения задач непосредственно для потенциала ускорения. Потенциал ускорения  $\Phi_0$  в установившемся движении связан с производными потенциала скорости с точностью до малых величин второго порядка малости соотношением

$$\Phi_0 = u (\varphi_{0x} - \varphi_{0y}) \quad (4.1)$$

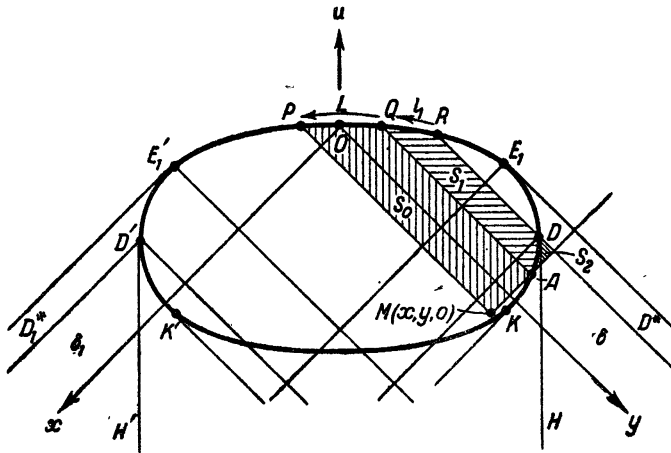
в характеристических координатах.

Возьмём точку  $M(x, y, 0)$  на поверхности крыла (фиг. 17), расположенную внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $D$  и вне конусов с вершинами в точках  $D'$  и  $E'_1$ .

Пользуясь соотношением (2.14), потенциал скорости в точке  $M$  представим по основной формуле (2.9) в следующем виде:

$$\varphi_0(x, y, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{s_0+s_1} \int \frac{A(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} - \frac{1}{2\pi} \int_{s_2} \int \frac{\vartheta(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}, \quad (4.2)$$

где области  $s_0$ ,  $s_1$  и  $s_2$  указаны на фиг. 17. Область  $s_2$  принадлежит области  $\delta$ . Область  $\delta$  расположена вне крыла внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $D$



Фиг. 17.

и вне характеристического конуса с вершиной в точках  $D'$  и  $E_1'$ . Через  $\vartheta$  мы обозначили значения производной  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в области  $\delta$ , где эта производная является неизвестной величиной.

Задача об обтекании крыла сверхзвуковым потоком, когда сказывается влияние вихревой пелены на крыло, будет единственной, если производную  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  подчинить дополнительному условию на задней кромке крыла, согласно принципу Чаплыгина-Жуковского.

Будем предполагать, что на задней кромке крыла производная  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  является непрерывной функцией. В частности, выполняются условия

$$\vartheta [x, \chi(x)] = A [x, \chi(x)], \quad (4.3)$$

$$\vartheta [x, \chi_2(x)] = A [x, \chi_2(x)] \quad (4.4)$$

соответственно на дугах  $DK$  и  $D'K'$  контура крыла, где функция  $y = \chi(x)$  есть уравнение дуги  $DK$  и функция  $y = \chi_2(x)$  есть уравнение дуги  $D'K'$  контура крыла. Точка  $K$  на задней кромке определена тем, что влево от неё выполняется условие (3.8) гл. I, вправо от неё это условие нарушено (фиг. 17). Точка  $K'$  на задней кромке крыла определена тем, что вправо от неё выполняется это условие, а влево от неё оно нарушено. Это означает, что в точках  $K$  и  $K'$  образующие характеристических конусов касаются контура крыла. Как следует из условия (3.8), на дуге  $K'K$  задней кромки крыла составляющая скорости, нормальная к контуру крыла, является сверхзвуковой. На дугах  $DK$  и  $D'K'$  задней кромки крыла составляющая скорости, нормальная к контуру крыла, является дозвуковой.

Для того чтобы получить потенциал ускорения  $\Phi_0$  в точке  $M$  на поверхности крыла, следует взять от выражения (4.2) производную по направлению, параллельному направлению набегающего потока. Прежде чем дифференцировать двойные квадратуры по параметрам  $x$  и  $y$ , проинтегрируем их по частям, в первом случае по переменной  $\xi$ , во втором по переменной  $\eta$ .

Совершая эти операции, используем условие (4.3) и выполняющееся вдоль характеристических линий соотношение (3.17), которое на прямой  $DD^*$  (фиг. 17) имеет вид

$$\int_{\chi(x_a)}^y \frac{\theta_1(x_a, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = - \int_{\psi_1(x_a)}^{\chi(x_a)} \frac{A(x_a, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta. \quad (4.5)$$

Кроме того, имеем в виду, что переменные интегрирования в области  $s_1$  изменяются в пределах:  $x_a \leq \xi \leq x_a$ ;  $\psi_1(\xi) \leq \eta \leq \chi(\xi)$ , где  $x_a$  — абсцисса точки  $D$  и  $x_a = \chi_a(y)$  — абсцисса точки  $A$  — точки пересечения характеристического

конуса с вершиной в точке  $M$  с задней кромкой крыла; в области  $s_0$  — в пределах  $x_a \leq \xi \leq x$ ,  $\psi_1(\xi) \leq \eta \leq y$  и в области  $s_2$  — в пределах  $x_a \leq \xi \leq x_a$  и  $\chi(\xi) \leq \eta \leq y$ .

Результат дифференцирования выражения (4.2) по указанному направлению даёт

$$\begin{aligned} \varphi_{0x}(x, y) + \varphi_{0y}(x, y) = & \\ = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\bar{\chi}(y)}^x \int_{\psi_1(\xi)}^y \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi + \right. & \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\bar{\chi}(y)}^x \int_{\psi_1(\xi)}^y \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi + & \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_a}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\psi_1(\xi)}^{\chi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi + & \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_a}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\psi_1(\xi)}^{\chi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi + & \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_a}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi + & \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_a}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi \right\}. & \end{aligned}$$

Выполним операции дифференцирования по параметрам. Прежде чем вычислить производную от первого интеграла, произведём интегрирование по частям по переменной  $\xi$ , полученный результат продифференцируем по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\bar{\chi}(y)}^x \int_{\psi_1(\xi)}^y \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi = \frac{1}{\sqrt{x-\bar{\chi}(y)}} \int_{\psi_1[\bar{\chi}(y)]}^y \frac{A[\bar{\chi}(y), \eta]}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + & \\ + \int_{\bar{\chi}(y)}^x \int_{\psi_1(\xi)}^y \frac{A_\xi(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi - \int_{\bar{\chi}(y)}^x \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\psi_1(\xi)}} \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} d\xi. & \end{aligned}$$

Проинтегрировав второй интеграл по частям по переменной  $\eta$ , дифференцируем по  $y$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \int_{\bar{\chi}(y)}^{\infty} \int_{\psi_1(\xi)}^y \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi = \\ & = \int_{\bar{\chi}(y)}^{\infty} \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\psi_1(\xi)}} d\xi + \int_{\bar{\chi}(y)}^{\infty} \int_{\psi_1(\xi)}^y \frac{A_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi - \\ & \quad - 2 \frac{\sqrt{y-\psi_1[\bar{\chi}(y)]}}{\sqrt{x-\bar{\chi}(y)}} A\{\bar{\chi}(y), \psi_1[\bar{\chi}(y)]\} \frac{d\bar{\chi}(y)}{dy} - \\ & \quad - 2 \frac{d\bar{\chi}(y)}{dy} \frac{1}{\sqrt{x-\bar{\chi}(y)}} \int_{\psi_1[\bar{\chi}(y)]}^y \sqrt{y-\eta} A_\eta[\bar{\chi}(y), \eta] d\eta. \end{aligned}$$

Третий интеграл сначала интегрируем по частям по  $\xi$ , затем дифференцируем по  $x$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\psi_1(\xi)}^{\bar{\chi}(\xi)} \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi = - \frac{1}{\sqrt{x-\bar{\chi}(y)}} \times \\ & \quad \times \int_{\psi_1[\bar{\chi}(y)]}^y \frac{A[\bar{\chi}(y), \eta]}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \frac{1}{\sqrt{x-x_d}} \int_{\psi_1(x_d)}^{x(x_d)} \frac{A(x_d, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \\ & \quad + \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\psi_1(\xi)}^{\bar{\chi}(\xi)} \frac{A_\xi(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi + \\ & \quad + \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \frac{A[\xi, \bar{\chi}(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\bar{\chi}(\xi)}} \frac{d\bar{\chi}(\xi)}{d\xi} d\xi - \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\psi_1(\xi)}} \frac{d\psi_1}{d\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Четвёртый интеграл сперва интегрируем по частям по  $\eta$ , затем дифференцируем по  $y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\psi_1(\xi)}^{\chi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi &= - \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \frac{A[\xi, \chi(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\chi(\xi)}} d\xi + \\ &+ \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\psi_1(\xi)}} d\xi + \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\psi_1(\xi)}^{\chi(\xi)} \frac{A_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi + \\ &+ 2 \frac{\sqrt{y-\psi_1[\bar{\chi}(y)]}}{\sqrt{x-\bar{\chi}(y)}} A\{\bar{\chi}(y), \psi_1[\bar{\chi}(y)]\} \frac{d\bar{\chi}(y)}{dy} + \\ &+ 2 \frac{d\bar{\chi}(y)}{dy} \frac{1}{\sqrt{x-\bar{\chi}(y)}} \int_{\psi_1[\bar{\chi}(y)]}^y \sqrt{y-\eta} A_\eta[\bar{\chi}(y), \eta] d\eta. \end{aligned}$$

Интегрируем по частям по  $\xi$ , затем дифференцируем по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi &= \frac{1}{\sqrt{x-x_d}} \int_{\chi(x_d)}^y \frac{\vartheta(x_d, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \\ &+ \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta_\xi(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi - \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \frac{\vartheta[\xi, \chi(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\chi(\xi)}} \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Наконец, интегрируя по частям по переменной  $\eta$ , дифференцируем затем по  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi &= \\ &= \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \frac{\vartheta[\xi, \chi(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\chi(\xi)}} d\xi + \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_{0x}(x, y) + \varphi_{0y}(x, y) = & \\ = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\bar{\chi}(y)}^{\infty} \int_{\psi_1(\xi)}^y \frac{A_\xi(\xi, \eta) + A_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi + \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\psi_1(\xi)}^{\chi(\xi)} \frac{A_\xi(\xi, \eta) + A_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi + \right. & \\ + \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta_\xi(\xi, \eta) + \vartheta_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi + \int_{\bar{\chi}(y)}^{\infty} \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\psi_1(\xi)}} d\xi + & \\ + \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\psi_1(\xi)}} d\xi - \int_{\bar{\chi}(y)}^{\infty} \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\psi_1(\xi)}} \frac{d\psi_1}{d\xi} d\xi - & \\ \left. - \int_{x_d}^{\bar{\chi}(y)} \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\psi_1(\xi)}} \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} d\xi \right\}. & \end{aligned}$$

Так как последние четыре члена выражения в фигурной скобке представляют собой

$$\int_{x_d}^{\infty} \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\psi_1(\xi)}} \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi,$$

то

$$\begin{aligned} \varphi_{0x} + \varphi_{0y} = & \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{s_1 + \vartheta_0} \int \frac{A_\xi(\xi, \eta) + A_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{s_2} \int \frac{\vartheta_\xi(\xi, \eta) + \vartheta_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi - & \\ - \frac{1}{2\pi} \int \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{(x-\xi)[y-\psi_1(\xi)]}} \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi, & \quad (4.6) \end{aligned}$$

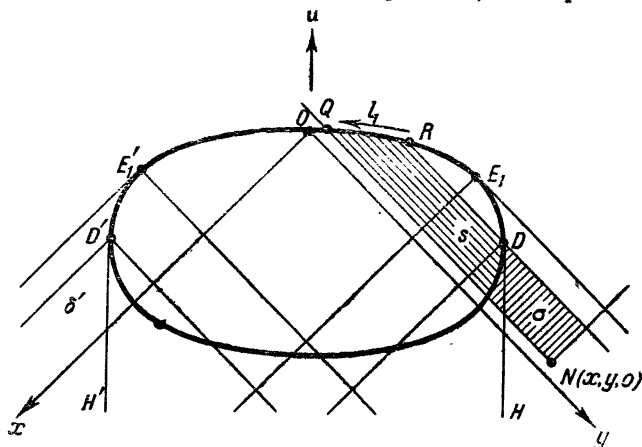
где дуга  $l_1 = RP$  изображена на фиг. 17. Для того чтобы вычислить потенциал ускорения  $\Phi_0$  в точке  $M$  по формуле (4.6), необходимо ещё определить функцию  $\vartheta_x + \vartheta_y$  в области  $s_2$ .

Построим интегральное уравнение для функции  $\vartheta_x + \vartheta_y$ . Выразим потенциал скорости по основной формуле (2.9) в произвольной точке  $N(x, y, 0)$ , расположенной вне крыла

в области  $\delta$ , где сказывается влияние вихревой пелены, простирающейся за крылом

$$\varphi_0(x, y, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int\int_{s(x, y)} \frac{A(\xi, \eta) d\eta d\xi}{V(x-\xi)(y-\eta)} - \frac{1}{2\pi} \int\int_{\sigma(x, y)} \frac{\vartheta(\xi, \eta) d\eta d\xi}{V(x-\xi)(y-\eta)}, \quad (4.7)$$

где переменные интегрирования в области  $s$  изменяются в пределах  $x_d \leq \xi \leq x$ ;  $\psi_1(\xi) \leq \eta \leq \chi(\xi)$ ; в области  $\sigma$  переменная  $\xi$  изменяется в тех же пределах, а переменная  $\eta$



Фиг. 18.

в пределах  $\chi(\xi) \leq \eta \leq y$  (фиг. 18). Дифференцируем это выражение по направлению, параллельному направлению основного набегающего потока. Согласно условию (1.10) гл. I потенциал скорости  $\varphi_0$  вне крыла в плоскости  $xu$  сохраняет постоянное значение вдоль прямой указанного направления, следовательно, левая часть выражения (4.7) в результате дифференцирования обратится в нуль, и мы получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int\int_{x_d \psi_1(\xi)}^{x \chi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta) d\eta d\xi}{V(x-\xi)(y-\eta)} + \frac{\partial}{\partial x} \int\int_{x_d \chi(\xi)}^{x y} \frac{\vartheta(\xi, \eta) d\eta d\xi}{V(x-\xi)(y-\eta)} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int\int_{x_d \psi_1(\xi)}^{x \chi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta) d\eta d\xi}{V(x-\xi)(y-\eta)} + \frac{\partial}{\partial y} \int\int_{x_d \chi(\xi)}^{x y} \frac{\vartheta(\xi, \eta) d\eta d\xi}{V(x-\xi)(y-\eta)} = 0. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Первые две квадратуры в уравнении (4.8) проинтегрируем по частям по переменной  $\xi$ , после чего дифференцируем по параметру  $x$ . Результат дифференцирования даёт

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_d}^x \int_{\psi_1(\xi)}^{\chi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi = \\ & = \frac{1}{\sqrt{x-x_d}} \int_{\psi_1(x_d)}^{\chi(x_d)} \frac{A(x_d, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \int_{x_d}^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\psi_1(\xi)}^{\chi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta d\xi \quad (4.9) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_d}^x \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi = \\ & = \frac{1}{\sqrt{x-x_d}} \int_{\chi(x_d)}^y \frac{\vartheta(x_d, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \int_{x_d}^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta d\xi. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Имея в виду соотношение (4.5), выполняющееся на характеристике  $DD^*$ , подставим формулы (4.9) и (4.10) в уравнение (4.8), после чего получим интегральное уравнение в виде

$$\begin{aligned} & \int_{x_d}^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\psi_1(\xi)}^{\chi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\psi_1(\xi)}^{\chi(\xi)} \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta \right\} d\xi = 0. \quad (4.11) \end{aligned}$$

Согласно формуле обращения интегрального уравнения Абеля, это уравнение равносильно уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{\chi(x)}^y \frac{\vartheta(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\psi_1(x)}^{\chi(x)} \frac{A(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\chi(x)}^y \frac{\vartheta(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\psi_1(x)}^{\chi(x)} \frac{A(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = 0. \quad (4.12) \end{aligned}$$

Последние две квадратуры в уравнении (4.12) проинтегрируем

по частям по переменной  $\eta$ , после чего произведём указанные операции дифференцирования по параметрам  $x$  и  $y$ . Используя условие (4.3), преобразуем уравнение (4.12) к виду

$$\int_{\chi(x)}^y \frac{\vartheta_x(x, \eta) + \vartheta_\eta(x, \eta)}{\sqrt{y - \eta}} d\eta =$$

$$= - \int_{\psi_1(x)}^{\chi(x)} \frac{A_x(x, \eta) + A_\eta(x, \eta)}{\sqrt{y - \eta}} d\eta - \frac{A[x, \psi_1(x)]}{\sqrt{y - \psi_1(x)}} \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right\}, \quad (4.13)$$

которому удовлетворяет функция  $\vartheta_x + \vartheta_y$  в области  $\delta$ . К уравнению (4.13) применим формулу обращения интегрального уравнения Абеля. Имея в виду, что правая часть уравнения (4.13) при  $y = \chi(x)$ , вообще говоря, отлична от нуля, получим решение для функции  $\vartheta_x + \vartheta_y$  в виде

$$\vartheta_x + \vartheta_y =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{y - \chi(x)}} \left[ - \int_{\psi_1(x)}^{\chi(x)} \frac{A_x(x, \eta) + A_\eta(x, \eta)}{\sqrt{\chi(x) - \eta}} d\eta - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{A[x, \psi_1(x)]}{\sqrt{\chi(x) - \psi_1(x)}} \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right\} \right] +$$

$$+ \int_{\chi(x)}^y \frac{1}{\sqrt{y - \eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ - \int_{\psi_1(x)}^{\chi(x)} \frac{A_x(x, \eta') + A_{\eta'}(x, \eta')}{\sqrt{\eta - \eta'}} d\eta' - \right.$$

$$\left. - \frac{A[x, \psi_1(x)]}{\sqrt{\eta - \psi_1(x)}} \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right\} \right] d\eta \Big\}; \quad (4.14)$$

Производя дифференцирование по параметру  $\eta$ , меняя порядок интегрирования и вычисляя внутреннюю квадратуру, представим решение уравнения (4.13) в виде

$$\vartheta_x(x, y) + \vartheta_y(x, y) = - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y - \chi(x)}} \int_{\psi_1(x)}^{\chi(x)} \{ A_x(x, \eta) + A_\eta(x, \eta) \} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\chi(x) - \eta}}{y - \eta} d\eta - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y - \chi(x)}} A[x, \psi_1(x)] \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right\} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\chi(x) - \psi_1(x)}}{y - \psi_1(x)}. \quad (4.15)$$

Подставим решение (4.15) в двойной интеграл, распространённый по области  $s_2$  в формуле (4.6)

$$\int_{s_2} \int \frac{\vartheta_\xi(\xi, \eta) + \vartheta_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi = -\frac{1}{\pi} \int_{x_d}^{x_a} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\eta-\chi(\xi)}} \int_{\psi_1(\xi)}^{\chi(\xi)} \{A_\xi(\xi, \eta') + A_{\eta'}(\xi, \eta')\} \frac{\sqrt{\chi(\xi)-\eta'}}{\eta-\eta'} d\eta' \right\} d\eta d\xi -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{x_d}^{x_a} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{\eta-\chi(\xi)}} \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} \frac{\sqrt{\chi(\xi)-\psi_1(\xi)}}{\eta-\psi_1(\xi)} \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}.$$

В тройном интеграле меняем порядок интегрирования по  $\eta'$  и  $\eta$

$$\int_{s_2} \int \frac{\vartheta_\xi(\xi, \eta) + \vartheta_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi = -\frac{1}{\pi} \int_{x_d}^{x_a} \int_{\psi_1(\xi)}^{\chi(\xi)} \frac{[A_\xi(\xi, \eta') + A_{\eta'}(\xi, \eta')]}{\sqrt{x-\xi}} \times$$

$$\times \sqrt{\chi(\xi)-\eta'} \left\{ \int_{\chi(\xi)}^y \frac{d\eta}{\sqrt{\eta-\chi(\xi)}(\eta-\eta')\sqrt{y-\eta}} \right\} d\eta' d\xi -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{x_d}^{x_a} \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)] \sqrt{\chi(\xi)-\psi_1(\xi)}}{\sqrt{x-\xi}} \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \int_{\chi(\xi)}^y \frac{d\eta}{\sqrt{\eta-\chi(\xi)}[\eta-\psi_1(\xi)]\sqrt{y-\eta}} \right\} d\xi. \quad (4.16)$$

Внутренние квадратуры в выражении (4.16) являются квадратурами вида (2.13). Подставляя результат вычисления этих квадратур в выражение (4.16), придём к соотношению

$$\int_{s_2} \int \frac{\vartheta_\xi(\xi, \eta) + \vartheta_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi = -\int_{s_1} \int \frac{A_\xi(\xi, \eta) + A_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi -$$

$$-\int_{\chi_1} \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{(x-\xi)[y-\psi_1(\xi)]}} \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi, \quad (4.17)$$

где дуга  $L_1 = RQ$  и области интегрирования  $s_1$  и  $s_2$  указаны на фиг. 17.

Подставляя соотношение (4.17) в выражение (4.6), получим формулу, определяющую потенциал ускорения на поверхности крыла в точке  $M$ , расположенной внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $D$  и вне характеристических конусов с вершинами в точках  $D'$  и  $E'_1$

$$\frac{\Phi_0(x, y)}{u} = \varphi_{0x} + \varphi_{0y} = -\frac{1}{2\pi} \int_{s_0} \int \frac{A_\xi(\xi, \eta) + A_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{A[\xi, \psi_1(\xi)]}{\sqrt{(x-\xi)[y-\psi_1(\xi)]}} \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi, \quad (4.18)$$

где дуга  $L = QP$ , направление интегрирования по которой указано на фиг. 17.

Итак, для того чтобы вычислить потенциал ускорения в точке  $M$  на поверхности крыла, следует вычислить два интеграла: поверхностный интеграл, распространённый по области  $s_0$  крыла, и контурный интеграл вдоль дуги  $L$  передней кромки крыла (фиг. 17).

Вернёмся к уравнению (4.12) и перепишем его в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\psi_1(x)}^y \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=0} \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\psi_1(x)}^y \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=0} \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = 0. \quad (4.19)$$

Меняя ролями координаты в (4.19), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\bar{\psi}_1(y)}^x \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=0} \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\bar{\psi}_1(y)}^x \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=0} \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} = 0, \quad (4.20)$$

где  $x = \bar{\psi}_1(y)$  — уравнение дуги  $E'_1E_1$  передней кромки крыла в виде, разрешённом относительно координаты  $x$ . Выражения (4.19) и (4.20) можно рассматривать как соотношения, выполняющиеся вдоль характеристических линий в той части плоскости  $xu$ , где сказывается влияние вихревой пелены. Соотношение (4.19) выполняется вдоль характеристических линий, параллельных оси  $Oy$  (линия  $NQ$  на фиг. 18); параметр  $y$  есть ордината точки, расположенной вне крыла справа в сфере влияния вихревой пелены (точка  $N$  на фиг. 18). Соотношение (4.20) выполняется вдоль линий, параллельных



Найдём теперь потенциал скорости  $\varphi_0(x, y, z)$  в точке  $M$ , расположенной внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $D$  крыла и вне характеристических конусов с вершинами в точках  $D'$  и  $E'_1$ . Область интегрирования  $S$  в основной формуле (2.9) в этом случае пересекается с плоской областью  $\delta$  (фиг. 19). Проекция  $M'$  на плоскость  $xu$  точки  $M$  изображена на фиг. 19.

Установим область интегрирования  $S$  для рассматриваемой точки. Отправляясь от условия (1.12) гл. I, выразим нормальную к плоскости  $xu$  производную  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в произвольной точке на плоскости  $xu$ , где потенциал скорости равен нулю и где в то же время сказывается влияние вихревой пелены, через нормальные производные в точках, расположенных вверх по потоку на одной и той же характеристической линии с исследуемой точкой. Для этой цели проведём такие же рассуждения, какие были проведены при получении формулы (2.7). В результате этого получим искомое представление для производной

$$\left[ \frac{\partial \varphi_0(x, y, z)}{\partial z} \right]_{z=0} = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y-x-y_d+x_d}} \times \\ \times \int_{\psi_1(x)}^{x+y_d-x_d} \left[ \frac{\partial \varphi_0(x, \eta, z)}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{\sqrt{x+y_d-x_d-\eta}}{y-\eta} d\eta. \quad (4.21)$$

Заметим, что функция  $\eta = \xi + y_d - x_d$ , которая соответствует верхнему пределу интегрирования, является уравнением вихревой линии  $DH$ , где переменные  $\xi$  и  $\eta$  являются текущими координатами на линии  $DH$ . Используя представление (4.21), легко доказать соотношение

$$\int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{\xi+y_d-x_d}^{y-\frac{z^2}{x-\xi}} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} = \\ = - \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \int_{\psi_1(\xi)}^{\xi+y_d-x_d} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} \quad (4.22)$$

таким же путём, как было доказано соотношение (2.15). В соотношении (4.22) пределы интегрирования  $x_1^*$  и  $x_2^*$  суть любые числа, удовлетворяющие неравенствам  $x_a \leq x_1^* < x_f$  и  $x_a < x_2^* \leq x_f$ , где  $x_f$  — координата точки  $F$ , изображённой на фиг. 19. Точка  $F$  есть точка пересечения вихревой линии  $DH$ , уравнение которой:  $y = x + y_a - x_a$ , с характеристическим конусом, имеющим вершину в точке, определённой координатами  $x, y, z$ . В частности, имеет место соотношение

$$\int_{s_2} \int_{s_1} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} = - \int_{s_1} \int_{s_2} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}}, \quad (4.23)$$

где области  $s_1$  и  $s_2$  изображены на фиг. 19. Область  $s_1$  отмечена горизонтальной штриховкой. Область  $s_2$  — вертикальной. Имея в виду соотношение (4.23), получим выражение для потенциала скорости в определённой выше точке  $M$

$$\varphi_0(x, y, z) = - \frac{1}{2\pi} \int_{s_0} \int \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} d\eta d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{s'} \int \frac{\vartheta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} d\eta d\xi, \quad (4.24)$$

где область  $s_0$  принадлежит поверхности крыла и область  $s'$  — вихревой пелене, как указано на фиг. 19.

Таким образом, для того чтобы вычислить потенциал скорости  $\varphi_0$  в точке  $M$ , в формуле (2.9) достаточно распространить интегрирование по области  $s_0 + s'$ . Прежде чем вычислить потенциал скорости, необходимо определить производную  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = \vartheta$  в области  $s'$ , принадлежащей к области  $\delta$ . Искомую производную найдём из решения (4.15), если его проинтегрировать по направлению, параллельному направлению набегающего потока в пределах от точки  $\bar{N}(x, y)$  до точки  $N(x, y)$ ; причём для того, чтобы полученное выраже-

ние отвечало значениям производной  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$ , в части области  $\delta$ , расположенной левее прямой  $DH$ , т. е. на вихревой пелене, координаты  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  следует взять как решения уравнений  $\bar{y} - \bar{x} - y + x = 0$  и  $\bar{y} - \chi(\bar{x}) = 0$  и значение функции  $\vartheta(\bar{x}, \bar{y})$  определить из условия (4.3) на задней кромке крыла.

Если координаты  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  положить равными  $\bar{x} = x_a$  и  $\bar{y} = y - x + x_a$  и значение функции  $\vartheta(\bar{x}, \bar{y})$  определить на прямой  $DD^*$  из решения (2.7), то полученное выражение будет отвечать значениям производной  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  в области  $\delta$ , расположенной правее прямой  $DH$  — вне вихревой пелены, но в сфере её влияния. Полагая в формуле (4.24) координату  $z = 0$ , найдём потенциал скорости на поверхности крыла в области влияния вихревой пелены.

### § 5. Распределение давления на поверхности крыла

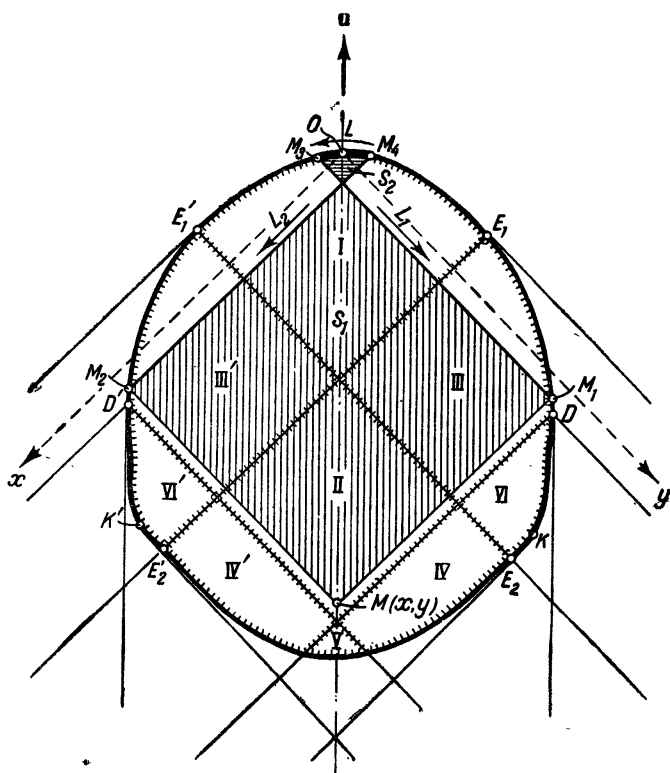
Рассмотрим крыло произвольной формы в плане. Пусть в характеристических координатах контур крыла задан следующими уравнениями: передняя кромка  $E_1'E$  крыла уравнением  $y = \psi_1(x)$  или в виде, разрешённом относительно координаты  $x$  уравнением  $x = \bar{\psi}_1(y)$ ; концевые кромки  $E_1D$  и  $E_1'D'$  крыла соответственно в виде  $y = \psi(x)$  и  $y = \psi_2(x)$  или  $x = \bar{\psi}(y)$  и  $x = \bar{\psi}_2(y)$ ; дуги  $DK$  и  $D'K'$  задней кромки крыла соответственно в виде  $y = \chi(x)$  и  $y = \chi_2(x)$  или в виде  $x = \bar{\chi}(y)$  и  $x = \bar{\chi}_2(y)$ . Найдём давление потока на поверхность крыла.

Согласно интегралу Бернулли разность давлений потока снизу и сверху крыла связана с потенциалом ускорения соотношением

$$p(x, y) = p_n(x, y) - p_v(x, y) = 2\rho\Phi_0(x, y), \quad (5.1)$$

где  $\rho$  — плотность невозмущённого потока. Поверхность крыла разобьём на девять характерных областей с различным аналитическим характером решения задачи, как указано на фиг. 20

и 21. Изображенные на фигурах точки  $E_1, E'_1, D, D', E_2, E'_2, K$  и  $K'$  контура крыла определены выше в §§ 2, 3 и 4.



Фиг. 20.

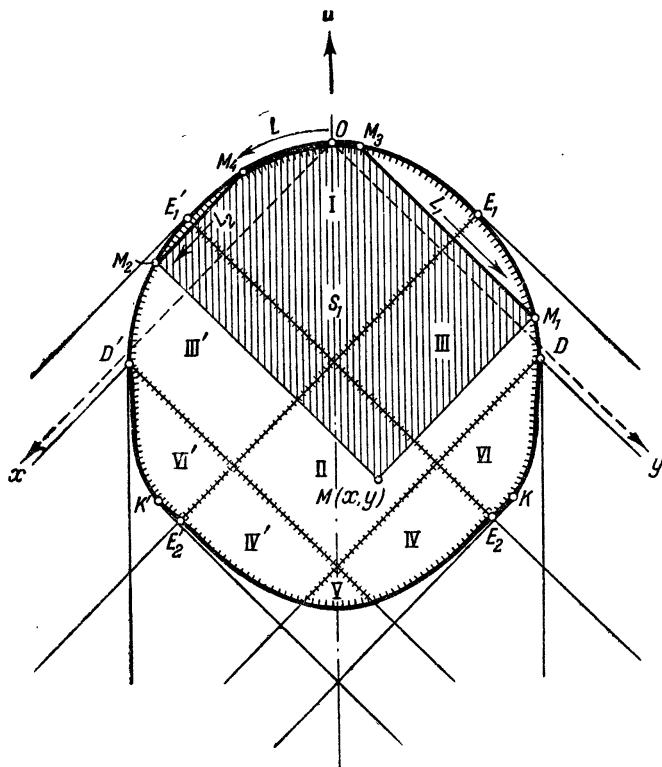
Выразим давление потока на поверхность крыла в каждой характерной области через заданную на крыле функцию  $A(x, y)$ , определяющую форму поверхности крыла и угол атаки.

Пусть точка  $M(x, y)$  есть некоторая точка на поверхности крыла.

Условимся обозначать буквами  $M$  с индексами концы отрезков прямых, параллельных осям координат и расположенных на поверхности крыла. Такие отрезки принадлежат линиям

пересечения характеристических конусов с вершинами в точках, расположенных в плоскости  $xu$ , с самой плоскостью  $xu$ .

Область  $I$  есть область, где концевой эффект, а следовательно, и влияние вихревой пелены не сказывается. Эта



Фиг. 21.

область крыла расположена вне характеристических конусов с вершинами в точках  $E_1$  и  $E_1'$ .

Область  $II$  есть область, где сказывается концевой эффект обеих концевых кромок крыла, но не сказывается влияние вихревой системы за крылом. Эта область расположена внутри характеристических конусов с вершинами в точках  $E_1$

и  $E'_1$  и вне конусов с вершинами в точках  $D$  и  $D'$ . В точке  $M$  области  $II$ , для которой линии  $M_1M_3$  и  $M_2M_4$  пересекаются на крыле, как указано на фиг. 20, разность давлений снизу и сверху крыла выражается формулой

$$\begin{aligned}
 p(x, y) = & -\frac{u\rho}{\pi} \int_{s_1} \int D(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi + \\
 & + \frac{u\rho}{\pi} \int_{s_2} \int D(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi + \frac{u\rho}{\pi} \int_L B[\xi, \psi_1(\xi); x, y] \times \\
 \times & \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi - \frac{u\rho}{\pi} \left\{ 1 - \frac{d\bar{\psi}(y)}{dy} \right\} \int_{L_1} B[\bar{\psi}(y), \eta; x, y] d\eta - \\
 & - \frac{u\rho}{\pi} \left( 1 - \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right) \int_{L_2} B[\xi, \psi_2(x); x, y] d\xi, \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

где  $s_1$  — область крыла, ограниченная прямыми  $MM_1$ ,  $MM_2$ ,  $M_1M_3$  и  $M_2M_4$ ;  $s_2$  — область крыла, ограниченная прямыми  $M_1M_3$ ,  $M_2M_4$  и дугой  $L = \widehat{M_4M_3}$ , и где для краткости положено

$$D(\xi, \eta; x, y) = \frac{A_\xi(\xi, \eta) + A_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}; \quad B(\xi, \eta; x, y) = \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}.$$

Направления интегрирования в контурных интегралах указаны на фиг. 20.

Если линии  $M_1M_3$  и  $M_2M_4$  не пересекаются на крыле, что указано на фиг. 21, то разность давлений выражается формулой

$$\begin{aligned}
 p(x, y) = & -\frac{u\rho}{\pi} \int_{s_1} \int D(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi - \\
 & - \frac{u\rho}{\pi} \int_L B[\xi, \psi_1(\xi); x, y] \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi - \\
 & - \frac{u\rho}{\pi} \left\{ 1 - \frac{d\bar{\psi}(y)}{dy} \right\} \int_{L_1} B[\bar{\psi}(y), \eta; x, y] d\eta - \\
 & - \frac{u\rho}{\pi} \left\{ 1 - \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right\} \int_{L_2} B[\xi, \psi_2(x); x, y] d\xi, \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

где  $s_1$  — область крыла, ограниченная прямыми  $MM_1$ ,  $M_1M_3$ ,  $MM_2$ ,  $M_2M_4$  и дугой  $L = \overline{M_3M_4}$ .

Направления интегрирования в контурных интегралах указаны на фиг. 21.

В области III — области крыла, расположенной внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $E_1$  и вне конусов с вершинами в  $E'_1$ ,  $D$ ,  $D'$ , разность давлений следует вычислять по формуле

$$p(x, y) = -\frac{u\rho}{\pi} \int_{s_1} \int D(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi - \\ -\frac{u\rho}{\pi} \int_L B[\xi, \psi_1(\xi); x, y] \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi - \\ -\frac{u\rho}{\pi} \left\{ 1 - \frac{d\bar{\psi}(y)}{dy} \right\} \int_{L_1} B[\bar{\psi}(y), \eta; x, y] d\eta. \quad (5.4)$$

В области III' — области, расположенной внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $E'_1$  и вне конусов с вершинами в точках  $E_1$ ,  $D$  и  $D'$ , разность давлений выражается аналогичной формулой

$$p(x, y) = -\frac{u\rho}{\pi} \int_{s_1} \int D(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi - \\ -\frac{u\rho}{\pi} \int_L B[\xi, \psi_1(\xi); x, y] \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi - \\ -\frac{u\rho}{\pi} \left\{ 1 - \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right\} \int_{L_2} B[\xi, \psi_2(x); x, y] d\xi. \quad (5.5)$$

Область IV расположена внутри характеристических конусов с вершинами в  $E_1$ ,  $E'_1$  и  $D$  и вне конуса с вершиной в  $D'$ . В точке  $M(x, y)$  в области IV, для которой линии  $M_1M_3$  и  $M_2M_4$  пересекаются на крыле,

разность давлений выражается формулой

$$\begin{aligned}
 p(x, y) = & \\
 = & -\frac{u\rho}{\pi} \int_{s_1} \int D(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi + \frac{u\rho}{\pi} \int_{s_2} \int D(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi + \\
 & + \frac{u\rho}{\pi} \int_L B[\xi, \psi_1(\xi); x, y] \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi - \\
 & - \frac{u\rho}{\pi} \left\{ 1 - \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right\} \int_{L_2} B[\xi_1\psi_2(x); x, y] d\xi. \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Для точки  $M$ , для которой линии  $M_1M_3$  и  $M_2M_4$  не пересекаются на крыле, разность давлений выражается формулой (5.5).

Область  $IV'$  — область крыла, расположенная внутри характеристических конусов с вершинами в точках  $E_1$ ,  $E'_1$  и  $D'$  и вне конуса с вершиной в точке  $D$ . В этой области разность давлений выражается формулой

$$\begin{aligned}
 p(x, y) = & \\
 = & -\frac{u\rho}{\pi} \int_{s_1} \int D(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi + \frac{u\rho}{\pi} \int_{s_2} \int D(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi + \\
 & + \frac{u\rho}{\pi} \int_L B[\xi, \psi_1(\xi); x, y] \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi - \\
 & - \frac{u\rho}{\pi} \left\{ 1 - \frac{d\bar{\psi}(y)}{dy} \right\} \int_{L_1} B[\bar{\psi}(y), \eta; x, y] d\eta, \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

если линии  $M_1M_3$  и  $M_2M_4$  пересекаются на крыле и если эти линии не пересекаются на крыле, то в области  $IV'$  разность давлений может быть вычислена по формуле (5.4).

Область  $V$  — область на поверхности крыла, расположенная внутри характеристических конусов с вершинами в точках  $E_1$ ,  $E'_1$ ,  $D$  и  $D'$ . В области  $V$  сказывается концевой эффект обеих концевых кромок крыла и сказывается влияние вихревой пелены, сбегаящей с обеих дуг  $DK$  и  $D'K'$  задней кромки крыла.

Разность давлений в этой области выражается формулой

$$p(x, y) = -\frac{u\rho}{\pi} \int_{s_1} \int D(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi + \frac{u\rho}{\pi} \int_{s_2} \int D(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi + \\ + \frac{u\rho}{\pi} \int_L B[\xi, \psi_1(\xi); x, y] \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi, \quad (5.8)$$

если прямые  $M_1M_3$  и  $M_2M_4$  пересекаются на крыле. Если прямые  $M_1M_3$  и  $M_2M_4$  не пересекаются на крыле, то разность давлений выражается формулой

$$p(x, y) = -\frac{u\rho}{\pi} \int_{s_1} \int D(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi - \\ - \frac{u\rho}{\pi} \int_L B[\xi, \psi_1(\xi); x, y] \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi. \quad (5.9)$$

В области VI, расположенной внутри характеристических конусов с вершинами в точках  $E_1$  и  $D$  и вне конусов с вершинами в точках  $E'_1$  и  $D'$ , а также в области VI', расположенной внутри характеристических конусов с вершинами в точках  $E'_1$  и  $D'$  и вне конусов с вершинами в точках  $E_1$  и  $D$ , — разность давлений выражается формулой (5.9). В областях VI и VI' сказывается концевой эффект одной концевой кромки и влияние вихревой пелены, сбегавшей соответственно с дуги  $DK$  или  $D'K'$  задней кромки крыла. Такой же вид имеет формула для расчёта разности давлений в области I.

Итак, если точка  $M$ , в которой ищется разность давлений, находится в одной из областей: в области II, что указано на фиг. 20 и 21, в области IV, в области IV' или в области V, то для того, чтобы установить область и контур интегрирования в формулах, определяющих давление, необходимо поступить следующим образом: из точки  $M$  провести две прямые  $MM_1$  и  $MM_2$  вверх по потоку до пересечения с концевыми или задними кромками крыла в зависимости от области, где находится точка  $M$ ; из точек пересечения  $M_1$  и  $M_2$  провести снова вверх по потоку прямые  $M_1M_3$  и  $M_2M_4$  до пересечения с передней кромкой крыла  $E'_1E_1$  в точках  $M_3$  и  $M_4$ .

Если же точка  $M$  находится в области  $III$  или в области  $VI$ , то для того, чтобы установить область и контур интегрирования в формулах, из точки  $M$  следует провести линии  $MM_4$  и  $MM_1$  вверх по потоку, линию  $MM_4$  непосредственно до пересечения с передней кромкой крыла  $E_1'E_1$  в точке  $M_4$ , линию  $MM_1$  до пересечения с концевой кромкой  $E_1D$  в случае области  $III$  или с задней кромкой  $DK_2$  в случае области  $VI$ ; из точки пересечения  $M_1$  следует снова провести вверх по потоку линию  $M_1M_3$  до пересечения с передней кромкой крыла  $E_1'E_1$ . Аналогично устанавливается область и контур интегрирования в формулах для давления, когда точка  $M$  находится в области  $III'$  или в области  $VI'$ .

Если точка  $M$  находится в области  $I$ , то из этой точки следует провести вверх по потоку линии  $MM_3$  и  $MM_4$  непосредственно до пересечения с передней кромкой крыла  $E_1'E_1$  в точках  $M_3$  и  $M_4$ .

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть концевые кромки  $E_1D$  и  $E_1'D'$  крыла являются прямыми линиями, параллельными направлению основного набегающего потока. В этом случае производные  $\frac{d\bar{\psi}(y)}{dy}$  и  $\frac{d\psi_2(x)}{dx}$  удовлетворяют соотношению  $\frac{d\bar{\psi}(y)}{dy} = \frac{d\psi_2(x)}{dx} = 1$  и, следовательно, формулы (5.2) и (5.3) существенно упрощаются, так как в них последние два члена обращаются в нуль. В частности, к этому классу крыльев относится крыло прямоугольной формы в плане.

2. Пусть поверхность крыла такова, что функция  $D$  на поверхности крыла тождественно обращается в нуль. Это имеет место, во-первых, тогда, когда поверхность крыла плоская, т. е. заданная на крыле функция имеет вид:  $A = -\frac{u\beta_0}{k}$ , где угол атаки  $\beta_0$  крыла является постоянной величиной. Во-вторых, это имеет место тогда, когда поверхность крыла является линейчатой поверхностью, вообще говоря, неразвёртывающейся, с образующими, расположенными в плоскостях, параллельных плоскости  $y = x$  (плоскости  $xz$  в первоначальных координатах). То-есть частные производные заданной на крыле функции  $A$  удовлетворяют соотношению

$A_x = -A_y$ . В частности, сюда относятся крылья с цилиндрической поверхностью, образующие которой направлены указанным образом. В этих случаях в формулах для распределения давления на крыле остаются только контурные интегралы и интегралы, распространённые по прямолинейным отрезкам  $L_1$  и  $L_2$ .

3. Особенно простой вид приобретают формулы для распределения давления на крыло, когда поверхность крыла такова, что функция  $D(\xi, \eta; x, y)$  на крыле тождественно обращается в нуль и в то же время концевые кромки  $E_1D$  и  $E'_1D'$  крыла являются прямыми линиями, параллельными направлению набегающего потока. Рассматриваемый случай представляет собой совокупность случаев 1 и 2. Для такого крыла в любой области на поверхности крыла разность давлений снизу и сверху крыла выражается посредством криволинейного интеграла

$$p(x, y) = \pm \frac{u\rho}{\pi} \int_L B[\xi, \psi_1(\xi); x, y] \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi, \quad (5.10)$$

где знак плюс следует взять, если прямые  $M_1M_3$  и  $M_2M_4$  пересекаются на крыле и знак минус, если эти прямые не пересекаются на крыле. Таким образом, в этом случае давление на поверхности крыла выражается посредством криволинейного интеграла, распространённого по дуге  $L$  передней кромки крыла.

4. Пусть форма крыла в плане такова, что точки  $E_1$  и  $D$ , а также  $E'_1$  и  $D'$  совпадают. В этом случае расчёт давления на поверхности крыла также упрощается, так как на крыле отсутствуют области II, III и III'. В частности, к такому классу крыльев относится крыло трапецевидной формы в плане.

Формулы для распределения давления на поверхности крыла показывают, что на крыле может существовать геометрическое место  $F^*(x, y) = 0$ , где давление на крыло обращается в нуль. Ниже по потоку от этого геометрического места разность давлений сверху и снизу крыла становится отрицательной. Геометрическое место  $F^*(x, y) = 0$  будем называть линией нулевого давления. Если крыло такое, что функция  $D(\xi, \eta; x, y)$  тождественно равна нулю на поверхности крыла, то линия нулевого давления будет расположена внутри характеристических конусов с вершинами в точках  $E_1$  и  $E'_1$ .

Напишем уравнения линии нулевого давления, когда на поверхности крыла функция  $D(\xi, \eta; x, y)$  тождественно равна нулю. В области II

$$F^*(x, y) = \int_{\bar{\psi}_1[\psi_2(\infty)]}^{\bar{\psi}(y)} \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)[y-\psi_1(\xi)]}} - \\ - 2 \left\{ 1 - \frac{d\bar{\psi}(y)}{dy} \right\} \frac{\sqrt{y-\psi_1[\bar{\psi}(y)]}}{\sqrt{x-\bar{\psi}(y)}} - \\ - 2 \left\{ 1 - \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right\} \frac{\sqrt{x-\bar{\psi}_1[\psi_2(x)]}}{\sqrt{y-\psi_2(x)}} = 0. \quad (5.11)$$

В области IV

$$F^*(x, y) = \int_{\bar{\psi}_1[\psi_2(\infty)]}^{\bar{\chi}(y)} \left\{ 1 - \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)[y-\psi_1(\xi)]}} - \\ - 2 \left\{ 1 - \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right\} \frac{\sqrt{x-\bar{\psi}_1[\psi_2(x)]}}{\sqrt{y-\psi_2(x)}} = 0. \quad (5.12)$$

В области V

$$F^*(x, y) = \bar{\psi}_1[\chi_2(x)] - \bar{\chi}(y) = 0. \quad (5.13)$$

В области IV' уравнение линии нулевого давления может быть получено из уравнения (5.12), если в нём поменять ролями координаты и вставить при этом вместо функций  $\psi_2(x)$  и  $\bar{\chi}(y)$  соответственно функции  $\bar{\psi}(y)$  и  $\chi_2(x)$ .

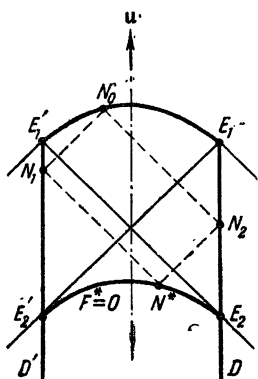
Если концевые кромки крыла являются прямыми, параллельными направлению основного набегающего потока, или крыло такое, что точки  $E_1$  и  $D$ , а также точки  $E'_1$  и  $D'$  совпадают, то уравнение для линий нулевого давления принимает довольно простой вид. В области V оно не изменится, а в областях II и IV вместо уравнений (5.11) и (5.12) в этом случае будем соответственно иметь

$$F^*(x, y) = \bar{\psi}_1[\psi_2(x)] - \bar{\psi}(y) = 0 \quad (5.14)$$

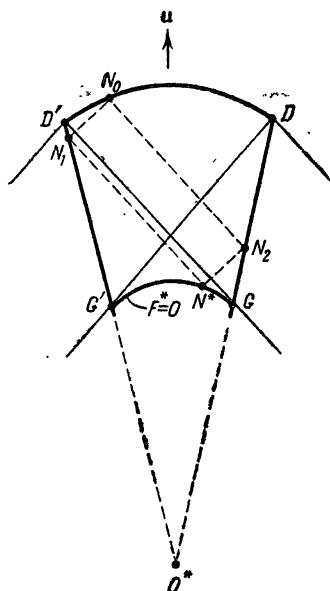
и

$$F^*(x, y) = \bar{\psi}_1[\psi_2(x)] - \bar{\chi}(y) = 0. \quad (5.15)$$

Во всех тех случаях, когда давление на поверхности крыла выражается посредством только криволинейного интеграла, распространённого по дуге  $L$  передней кромки крыла, линия нулевого давления  $F^* = 0$  может быть легко построена графически. В этих случаях линия нулевого давления является геометрическим местом таких точек  $M$  на поверхности крыла, для которых определённые выше точки  $M_3$  и  $M_4$  на перед-



Фиг. 22.



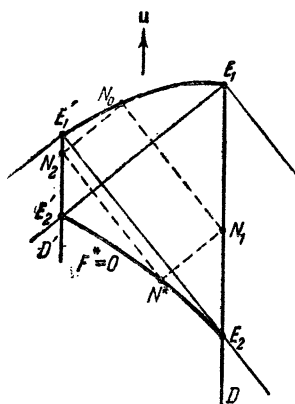
Фиг. 23.

ней кромке крыла совпадают, т. е. дуга  $L$  на передней кромке крыла, по которой распространяется криволинейный интеграл, стягивается в точку.

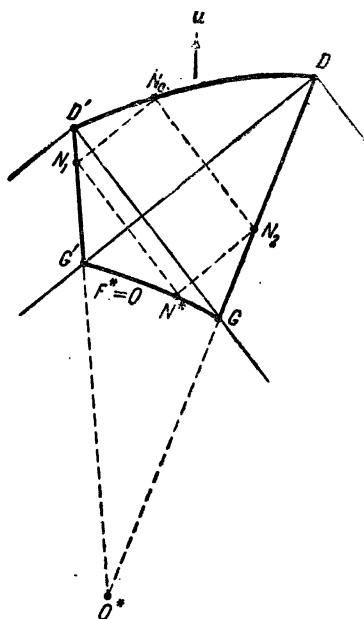
Построим линию нулевого давления следующим образом: из каждой точки  $N_0$  передней кромки крыла внутрь крыла проводим прямые  $N_0N_1$  и  $N_0N_2$ , параллельные образующим характеристических конусов, до пересечения с концевыми кромками крыла или с задними кромками крыла, в зависимости от формы крыла в плане. Из точек пересечения  $N_1$  и  $N_2$  опять проводим внутрь крыла в указанном направлении прямые  $N_1N^*$  и  $N_2N^*$  до их взаимного пересечения. Геометрическое место точек  $N^*$  их пересечения и есть искомая

линия нулевого давления. На фиг. 22—25 даны примеры построения линии нулевого давления для некоторых форм крыла в плане.

Если крыло симметрично относительно плоскости  $xz$  (в первоначальных координатах) и если концевые кромки  $E_1D$  и  $E'_1D'$  являются прямыми линиями, параллельными направлению основного потока, то линия нулевого давления является линией, эквидистантной передней кромке крыла и проходит через точки  $E'_2$  и  $E_2$  (фиг. 22). Точки  $E'_2$  и  $E_2$  являются точ-



Фиг. 24.



Фиг. 25.

ками пересечения характеристических конусов с вершинами в точках  $E_1$  и  $E'_1$  с концевыми кромками крыла.

Если крыло симметричное, а определённые выше точки  $E_1$  и  $D$  на контуре крыла, а также точки  $E'_1$  и  $D'$  совпадают и если задние кромки крыла являются прямыми линиями, то линия нулевого давления является кривой, полученной преобразованием подобия из передней кромки  $E'_1E_1$  крыла относительно центра подобия  $O^*$ . Центр  $O^*$  является точкой пересечения задних кромок крыла (фиг. 23). Линия нулевого

давления в этом случае проходит через точки  $G$  и  $G'$ , которые являются точками пересечения характеристических конусов с вершинами в точках  $D$  и  $D'$  с контуром крыла.

Если крыло не симметрично относительно плоскости  $xz$  и концевые кромки  $E_1D$  и  $E'_1D'$  являются прямыми линиями, параллельными направлению основного потока, то линия нулевого давления является зеркальным отображением относительно плоскости  $xz$  линии, эквидистантной передней кромке крыла и проходящей через точки  $E'_2$  и  $E_2$  (фиг. 24).

Если крыло не симметрично и точки  $E_1$  и  $D$ , а также точки  $E'_1$  и  $D'$  совпадают, и если задние кромки крыла являются прямыми, одинаково наклонными к плоскости  $xz$ , то линия нулевого давления является зеркальным отображением относительно плоскости  $xz$  линии, которая получается преобразованием подобия с центром в точке  $O^*$  из передней кромки крыла и проходит через точки  $G$  и  $G'$  (фиг. 25).

Формулы для давления показывают, что на концевых кромках крыла — дугах  $E_1D$  и  $E'_1D'$  контура крыла при приближении точки  $M$  к этим дугам изнутри крыла разность давлений снизу и сверху крыла обращается в бесконечность порядка  $r^{-1/2}$ , где  $r$  — расстояние точки  $M$  до дуги  $E_1D$  или  $E'_1D'$ . При приближении точки  $M$  к дуге  $E_1D$  или  $E'_1D'$  первые два члена в формулах (5.4) и (5.5) исчезают, а последний член в каждой из этих формул преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 -\frac{u\rho}{\pi} \left\{ 1 - \frac{d\bar{\psi}(y)}{dy} \right\} \int_{L_1} B[\bar{\psi}(y), \eta; x, y] d\eta = \\
 = -\frac{u\rho}{\pi} \frac{1 - \frac{d\bar{\psi}(y)}{dy}}{\sqrt{x - \bar{\psi}(y)}} \int_{L_1} \frac{A[\bar{\psi}(y), \eta]}{\sqrt{y - \eta}} d\eta
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 -\frac{u\rho}{\pi} \left\{ 1 - \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right\} \int_{L_2} B[\xi, \psi_2(x); x, y] d\xi = \\
 = -\frac{u\rho}{\pi} \frac{1 - \frac{d\psi_2(x)}{dx}}{\sqrt{y - \psi_2(x)}} \int_{L_2} \frac{A[\xi, \psi_2(x)]}{\sqrt{x - \xi}} d\xi
 \end{aligned}$$

обращается в бесконечность указанного порядка. Исключение представляет случай, когда концевые кромки  $E_1D$  и  $E_1'D'$  являются прямыми линиями, параллельными направлению набегающего потока. В этом случае, как следует из формул (5.4) и (5.5), давление на концевых кромках крыла обращается в нуль.

Давление на задней кромке крыла, дуге  $D'K'E_2E_2KD$  контура крыла, как следует из формул (5.6) — (5.9), остаётся ограниченным. В частности, на дугах  $DK$  и  $D'K'$  контура крыла давление равно нулю. Так же равно нулю давление на передней кромке крыла дуге  $E_1'E_1$  контура крыла.

Все полученные результаты справедливы также и в тех случаях, когда передняя кромка  $E_1'E_1$  крыла задана не одним уравнением  $y = \psi_1(x)$ , а состоит из отрезков гладких кривых, заданных уравнениями  $y = \psi_{1k}(x)$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ , причём  $n$  может быть любым числом. Точно также каждая из концевых и задних кромок крыла может состоять из отрезков гладких кривых. Во всех этих случаях в формулах для распределения давления поверхностные и контурные интегралы, при фактическом вычислении их, следует разбить на составные части.

Если контур крыла состоит из отдельных гладких кривых, заданных различными уравнениями, например является кусочно-гладким, то число областей на поверхности крыла с различным аналитическим видом формул для давления на крыле увеличится за счёт угловых точек или точек сопряжения отдельных кривых, образующих контур крыла.

Зная потенциал ускорения или потенциал скорости на поверхности крыла легко, как известно, вычислить аэродинамические силы, действующие на крыло. Приведём формулы, определяющие аэродинамические силы, пользуясь первоначальной системой координат  $Oxuz$ , изображённой на фиг. 1 и 2.

Для подъёмной силы  $P$  имеем

$$P = 2\rho \int_{\Sigma} \Phi_0(x, y) dx dy, \quad (5.16)$$

где переменные интегрирования в области  $\Sigma$  изменяются в пределах  $\Psi(y) \leq x \leq X(y)$  и  $y_{a'} \leq y \leq y_a$ . Причём,  $x = \Psi(y)$  —

уравнение дуги  $D'E_1E_1D$  контура крыла, а  $x = X(y)$  — уравнение задней кромки крыла — дуги  $D'E_2E_2D$  контура крыла (фиг. 20 и 21). Пределы интегрирования  $y_{a'}$  и  $y_a$  являются соответственно координатами точек  $D'$  и  $D$  контура крыла.

Так как потенциал ускорения имеет вид:  $\Phi_0(x, y) = u \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}$ , то, производя интегрирование в (5.16) по  $x$  и имея в виду, что потенциал скорости  $\varphi_0$  на дуге  $D'E_1E_1D$  контура крыла равен нулю, согласно условиям (1.11) и (1.12) гл. I, формулу для подъёмной силы  $P$  можно представить и в таком виде

$$P = 2\rho u \int_{y_{a'}}^{y_a} \varphi_0 [X(y), y] dy. \quad (5.17)$$

Если задняя кромка крыла является кусочно-гладкой, то при фактическом вычислении контурного интеграла следует разбить его на составные части.

Выражение для момента  $M_y$  подъёмной силы относительно оси  $Oy$  имеет вид

$$M_y = 2\rho \int_{\Sigma} \Phi_0(x, y) x dx dy. \quad (5.18)$$

Аналогичный вид имеют выражения для моментов относительно других осей.

Изложенный метод обобщается на случай обтекания хвостового оперения, обтекания бипланов тандем, обтекания полипланов, расположенных определённым образом в потоке, и т. д.

Для того чтобы получить формулы для расчёта давления потока на оперение с учётом влияния крыла, следует поступить следующим образом. Выразить функцию  $\varphi_{0x} + \varphi_{0y}$  в точке  $M(x, y)$  на оперении, пользуясь основной формулой (2.9). В выражение для функции  $\varphi_{0x} + \varphi_{0y}$  под знаком интеграла войдёт функция  $\vartheta_x + \vartheta_y$  на вихревой пелене. Функция  $\vartheta_x + \vartheta_y$  найдётся из интегральных уравнений Абеля, которые строятся по способу, изложенному в § 4.

В случае обтекания оперения также следует различать отдельные характерные области на поверхности оперения с различным аналитическим характером решения задачи. Поверхность

оперения следует разбить на области подобно тому, как это сделано на фиг. 20 и 21 при обтекании изолированного крыла однородным потоком. Только в этом случае при разбиении поверхности оперения на области следует учитывать, с одной стороны, влияние крыла и с, другой стороны, концевой эффект, а также влияние системы вихрей, сбегаящей с самого оперения.

### § 6. Обтекание крыла ненулевой толщины установившимся сверхзвуковым потоком

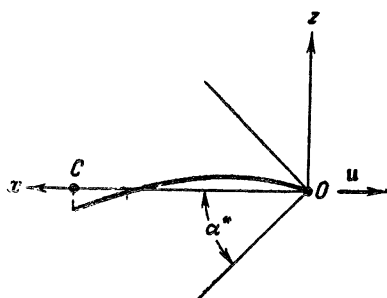
Рассмотрим установившееся движение тонкого крыла с малым углом атаки и с заданным профилем, как указано на фиг. 28. На верхней стороне поверхности крыла нормальную составляющую скорости будем считать заданной в виде

$$v_{nv} = A_{0v} = -u\beta_v, \quad (6.1)$$

а на нижней стороне в виде

$$v_{nv} = A_{0n} = -u\beta_n, \quad (6.2)$$

где функции  $\beta_v$  и  $\beta_n$  — углы атаки соответственно элементов верхней и нижней поверхности крыла. Оси координат изображены на фиг. 1 и 28.



Фиг. 26.

Будем исследовать возмущённый поток воздуха, вызванный движением крыла с заданным профилем, как результат наложения двух потоков: симметричного относительно плоскости  $xu$  потока, вызванного движением крыла с некоторым симметричным профилем (фиг. 27), и антисимметричного относительно той же плоскости потока, вызванного движением крыла с некоторым профилем нулевой толщины (фиг. 26).

В связи с этим потенциал скорости  $\varphi_{0n}$  представим в виде

$$\varphi_{0n}(x, y, z) = \varphi_{0c}(x, y, z) + \varphi_0(x, y, z). \quad (6.3)$$

Потенциал скорости  $\varphi_{0c}$  обусловлен движением крыла с симметричным профилем и удовлетворяет условию

$$\varphi_{0c}(x, y, -z) = \varphi_{0c}(x, y, z). \quad (6.4)$$

Потенциал скорости  $\varphi_0$  обусловлен движением крыла с профилем нулевой толщины и, как показано в § 1 гл. I, удовлетворяет условию

$$\varphi_0(x, y, -z) = -\varphi_0(x, y, z). \quad (6.5)$$

Установим условия обтекания. Граничные условия на поверхности крыла перенесём параллельно оси  $Oz$  на проекцию  $\Sigma$  крыла на плоскость  $xu$  (фиг. 1). На основании заданных на поверхности крыла условий (6.1) и (6.2) получим условия обтекания

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_{0п}}{\partial z} \right\}_{z=+0} = A_{0в}(x, y) \quad (6.6)$$

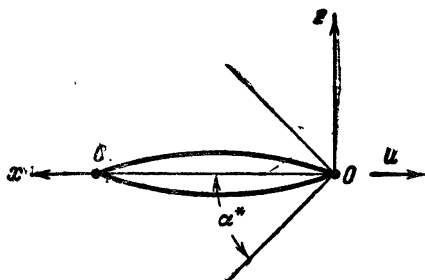
и

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_{0п}}{\partial z} \right\}_{z=-0} = A_{0н}(x, y), \quad (6.7)$$

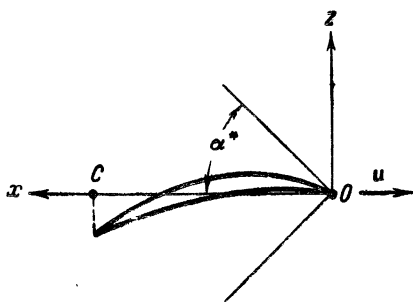
которые соответственно должны выполняться на верхней и нижней сторонах  $\Sigma$ . Пользуясь представлением (6.3), установим краевые условия для искомого потенциалов  $\varphi_{0c}$  и  $\varphi_0$ . Имея в виду, что

в плоскости  $xu$  нормальная производная потенциала  $\varphi_0$  удовлетворяет условию

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_{0c}}{\partial z} \right\}_{z=+0} = - \left\{ \frac{\partial \varphi_{0c}}{\partial z} \right\}_{z=-0}, \quad (6.8)$$



Фиг. 27.



Фиг. 28.

краевое условие, которое должно выполняться на верхней стороне  $\Sigma$ , найдем в виде

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_{0c}}{\partial z} \right\}_{z=0} = \Gamma_0(x, y), \quad (6.9)$$

где функция  $\Gamma_0$  связана с заданными на поверхности крыла величинами соотношением

$$\Gamma_0 = \frac{A_{0в} - A_{0н}}{2} = -u \left[ \frac{\beta_v - \beta_n}{2} \right] = -u\gamma_0. \quad (6.10)$$

Условие, которое должно выполняться для функции  $\varphi_{0c}$  на нижней стороне  $\Sigma$ , найдем, используя (6.8), в виде

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_{0c}}{\partial z} \right\}_{z=0} = -\Gamma_0(x, y) = u\gamma_0. \quad (6.11)$$

Так как в плоскости  $xu$  нормальная производная потенциала  $\varphi_0$  удовлетворяет условию

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=+0} = \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=-0}, \quad (6.12)$$

одновременно на обеих сторонах  $\Sigma$  должно выполняться условие (1.6) гл. I

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = A_0(x, y), \quad (6.13)$$

где функция  $A_0$  связана с заданными на поверхности крыла величинами соотношением

$$A_0 = \frac{A_{0в} + A_{0н}}{2} = -u \left[ \frac{\beta_v + \beta_n}{2} \right] = -u\beta_0. \quad (6.14)$$

Функция  $\beta_0 = \frac{\beta_v + \beta_n}{2}$  есть угол атаки элементов крыла с профилем нулевой толщины. Функция  $\gamma_0 = \frac{\beta_v - \beta_n}{2}$  — угол атаки элементов верхней стороны крыла с симметричным профилем.

Краевая задача для функции  $\varphi_0$  поставлена в § 1 гл. I, решению этой задачи — задачи об обтекании крыла с профилем нулевой толщины — посвящена настоящая глава.

Сформулируем краевую задачу для функции  $\varphi_{0c}$ . Найти функцию  $\varphi_{0c}$ , удовлетворяющую уравнению (1.5) и условию (1.1) гл. I на волне возмущения, условию (6.13) в плоской области  $\Sigma$  и условию

$$\frac{\partial \varphi_{0c}}{\partial z} = 0 \quad (6.15)$$

всюду в плоскости  $xu$  вне области  $\Sigma$ , где среда возмущена.

Так как потенциал  $\varphi_{0c}$  является функцией, симметричной относительно плоскости  $xu$ , то достаточно решить задачу для верхнего полупространства. Решение этой краевой задачи, в частности, содержится в формуле (1.1). По этой формуле может быть вычислен потенциал скорости  $\varphi_{0c}$  всюду, так как в случае симметричного обтекания крыла для любой точки  $M(x, y, z)$  пространства в области интегрирования  $S$  производная  $\frac{\partial \varphi_{0c}}{\partial z}$  всюду является известной величиной. На крыле производная  $\frac{\partial \varphi_{0c}}{\partial z}$  задана, а вне крыла эта производная равна нулю. При вычислении потенциала  $\varphi_{0c}$  в точке  $M$  по формуле (1.1) следует в ней вместо функции  $\left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=0}$  положить

функцию  $\left\{ \frac{\partial \varphi_{0c}}{\partial z} \right\}_{z=+0} = \Gamma_0(x, y)$  и интегрирование распространить по части поверхности крыла, которая попадает внутрь характеристического конуса с вершиной в точке  $M$ .

Решение задачи об обтекании крыла с симметричным профилем и нулевым углом атаки установившимся сверхзвуковым потоком впервые дал Паккет<sup>1)</sup>.

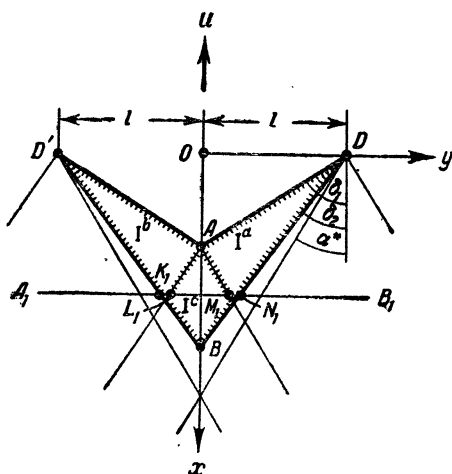
## § 7. Примеры

В этом параграфе мы прилагаем формулы, полученные в главе II, к построению примеров для некоторых частных форм крыла в плане. При построении примеров мы используем результаты вычислений, проведённых студентками Московского университета Н. С. Бурновой и М. М. Прилуко.

1) См. работу Паккета, цитированную выше на стр. 11.

I. Стреловидное крыло<sup>1)</sup>

Рассмотрим крыло стреловидной формы в плане, у которого передняя кромка крыла образована отрезками  $AD$  и  $AD'$  и задняя кромка крыла отрезками  $DB$  и  $D'B$ , как указано на фиг. 29. Пусть заданы следующие геометрические



Фиг. 29.

параметры:  $\delta_1$  — угол наклона передней кромки крыла к направлению набегающего потока;  $\delta_2$  — угол наклона задней кромки к тому же направлению,  $l$  — полуразмах крыла.

Уравнение передней кромки крыла в характеристических координатах  $x$  и  $y$  с началом в точке  $O$  имеет вид:

отрезок  $AD$

$$y_1 = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \delta_1} \{ (1 - \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \delta_1) x_1 + 2l \operatorname{ctg} \alpha^* \},$$

отрезок  $AD'$

$$y_1 = \frac{1}{1 - \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \delta_1} \{ (1 + \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \delta_1) x_1 - 2l \operatorname{ctg} \alpha^* \}$$

<sup>1)</sup> Результаты для стреловидного, полуэллиптического и полукруглого крыла получены студенткой Н. С. Бурновой.

и уравнение задней кромки имеет вид:

отрезок  $DB$

$$y_1 = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \delta_2} \{(1 - \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \delta_2) x_1 + 2l \operatorname{ctg} \alpha^*\},$$

отрезок  $D'B$

$$y_1 = \frac{1}{1 - \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \delta_2} \{(1 + \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \delta_2) x_1 - 2l \operatorname{ctg} \alpha^*\},$$

где, как и выше, угол  $\alpha^*$  — половина угла при вершине характеристического конуса.

Рассмотрим крыло, у которого углы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  удовлетворяют неравенствам  $\delta_1 > \alpha^*$  и  $\delta_2 > \alpha^*$ , т. е. такое крыло, на поверхности которого не сказывается влияние вихревой пелены.

Будем предполагать, что поверхность крыла является плоскостью, наклонённой под углом  $\beta_0$  к направлению набегающего потока. Следовательно, всюду на обеих сторонах поверхности крыла производная  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$  является постоянной величиной и задана в виде

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = -u \beta_0 \operatorname{tg} \alpha^*. \quad (7.1)$$

В соответствии с изложенным в § 5 поверхность крыла разобьём на три характерные области  $I^a$ ,  $I^b$  и  $I^c$  с различным аналитическим характером решения задачи за счёт угловой точки на передней кромке крыла (фиг. 29). Вычислим давление потока на поверхности крыла в каждой области.

Пользуясь формулой (5.9), найдём давление в области  $I^a$ , расположенной вне характеристического конуса с вершиной в точке  $A$ , в виде

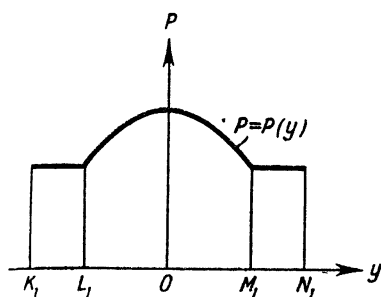
$$p = \frac{2u^2 \rho \beta_0}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1}} = 2u^2 \rho \beta_0 \operatorname{tg} \alpha^*. \quad (7.2)$$

Так же выражается давление в области  $I^b$ . Эта формула показывает, что в областях  $I^a$  и  $I^b$  давление является постоянной величиной.

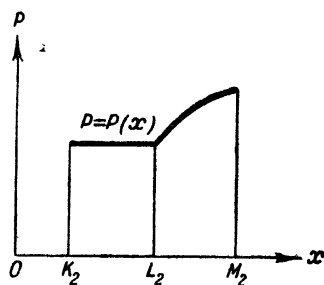
В области  $I^c$ , расположенной внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $A$ , пользуясь той же



На фиг. 31 и 32 соответственно даны графики распределения давления в сечении  $A_1B_1$ , параллельном оси  $Oy$ , и в сечении  $A_2B_2$ , параллельном оси  $Ox$ .



Фиг. 31.



Фиг. 32.

Результат вычисления подъёмной силы  $P$  рассматриваемого стреловидного крыла выражается формулой

$$P = \frac{2u^2\rho\beta_0^2}{\text{tg } \delta_2} \frac{(\text{tg } \delta_1 - \text{tg } \delta_2)}{\sqrt{\text{ctg}^2 \alpha^* \text{tg}^2 \delta_1 - 1}} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{\text{ctg } \alpha^* \text{tg } \delta_1 - 1}{\text{ctg } \alpha^* \text{tg } \delta_1 + 1}} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \frac{\text{tg } \delta_1 - \text{tg } \delta_2}{\text{tg } \delta_1 + \text{tg } \delta_2} \arctg \sqrt{\frac{\text{ctg } \alpha^* \text{tg } \delta_1 + 1}{\text{ctg } \alpha^* \text{tg } \delta_1 - 1}} + \right. \\ \left. + \frac{4}{\pi} \frac{\text{tg}^3 \delta_2}{\text{tg } \delta_1 (\text{tg}^2 \delta_1 - \text{tg}^2 \delta_2)} \arctg \sqrt{\frac{\text{ctg } \alpha^* \text{tg } \delta_2 - 1}{\text{ctg } \alpha^* \text{tg } \delta_2 + 1}} \right\}. \quad (7.5)$$

Коэффициент  $c_z$  подъёмной силы крыла находится в виде

$$c_z = \frac{4\beta_0 \text{tg } \delta_1}{\sqrt{\text{ctg}^2 \alpha^* \text{tg}^2 \delta_1 - 1}} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{\text{ctg } \alpha^* \text{tg } \delta_1 - 1}{\text{ctg } \alpha^* \text{tg } \delta_1 + 1}} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \frac{\text{tg } \delta_1 - \text{tg } \delta_2}{\text{tg } \delta_1 + \text{tg } \delta_2} \arctg \sqrt{\frac{\text{ctg } \alpha^* \text{tg } \delta_1 + 1}{\text{ctg } \alpha^* \text{tg } \delta_1 - 1}} \right\} + \\ + \frac{16\beta_0 \text{tg}^2 \delta_2}{\pi (\text{tg } \delta_1 + \text{tg } \delta_2) \sqrt{\text{ctg}^2 \alpha^* \text{tg}^2 \delta_2 - 1}} \arctg \sqrt{\frac{\text{ctg } \alpha^* \text{tg } \delta_2 - 1}{\text{ctg } \alpha^* \text{tg } \delta_2 + 1}}. \quad (7.6)$$

Коэффициент  $c_x$  волнового сопротивления крыла, как известно, связан с коэффициентом подъёмной силы соотношением

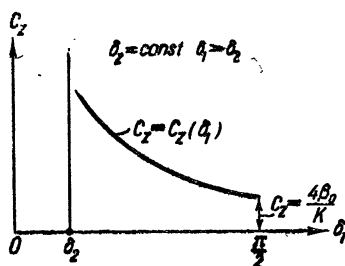
$$c_x = \beta_0 c_z.$$

Рассмотрим частные случаи формулы (7.6). В пределе при  $\delta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  для треугольного крыла получим

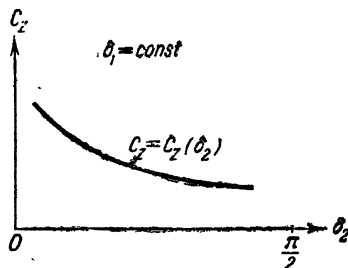
$$c_z = 4\beta_0 \operatorname{tg} \alpha^* \quad (7.7)$$

— известный результат для коэффициента подъемной силы треугольного крыла<sup>1)</sup>.

Сопоставляя формулы (7.6) и (7.7), заключаем, что при одинаковой скорости движения крыла и равных углах атаки коэффициент подъемной силы стреловидного крыла превосходит коэффициент подъемной силы треугольного крыла.



Фиг. 33.



Фиг. 34.

В частном случае, когда  $\delta_2 = \delta_1$ , получаем стреловидное крыло бесконечного размаха. В пределе при  $\delta_2 \rightarrow \delta_1$  формула (7.6) даёт

$$c_z = \frac{4\beta_0 \operatorname{tg} \delta_1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha^* \operatorname{tg}^2 \delta_1 - 1}}.$$

Этот результат показывает, что коэффициент подъемной силы стреловидного крыла бесконечного размаха совпадает с коэффициентом подъемной силы скользящего крыла бесконечного размаха с углом скольжения, равным  $\delta_1$ .

Формула (7.6) показывает, что с ростом углов  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — углов наклона передней и задней кромок крыла к направлению набегающего потока, коэффициент подъемной силы крыла убывает. Зависимость коэффициента  $c_z$  подъемной силы стреловидного крыла от углов  $\delta_1$  и  $\delta_2$  изображена графически на фиг. 33 и 34.

1) См. работу М. И. Гуревича, цитированную на стр. 10.



бегающего потока, таким образом нормальная производная  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z_1}$  задана в виде (7.1).

Рассмотрим обтекание полуэллиптического крыла, когда характеристические конусы с вершинами в точках  $D$  и  $D'$  пересекаются на поверхности крыла. В соответствии с изложенным в § 5 поверхность крыла разобьем на четыре характерные области  $I$ ,  $VI$ ,  $VI'$  и  $V$  с различным аналитическим характером решения задачи. Область  $I$  расположена вне характеристических конусов с вершинами в точках  $D$  и  $D'$ . В этой области не сказывается влияние вихревой пелены, простирающейся за крылом. Область  $VI$  — область на поверхности крыла, которая расположена внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $D$  и вне конуса с вершиной в точке  $D'$ . Область  $V$  — область, которая попадает внутрь обоих характеристических конусов с вершинами в точках  $D$  и  $D'$ .

Пользуясь формулами (5.8) и (5.9), вычислим давление на поверхности крыла в каждой области. В области  $I$  давление всюду постоянно и выражается формулой (7.2.) В области  $VI$  распределение давления выражается в координатах  $x$  и  $y$  формулой

$$p = u^2 \rho \beta_0 \operatorname{tg} \alpha^* \times \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\operatorname{ctg} \alpha^* B_1 y + B_2 f_1 + 2a_1 b_1 \operatorname{ctg} \alpha^* \sqrt{B_1 - f_1^2}}{x B_1} \right\}, \quad (7.9)$$

где

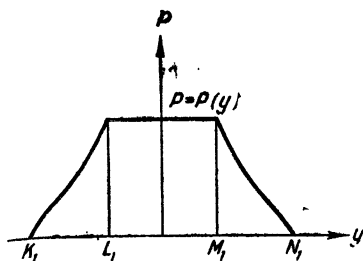
$$B_1 = a_1^2 + b_1^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha^*, \quad f_1 = x + y \operatorname{ctg} \alpha^*, \\ B_2 = a_1^2 - b_1^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha^*,$$

Аналогичной формулой выражается распределение давления в области  $VI$ . В области  $V$  формула распределения давления имеет вид

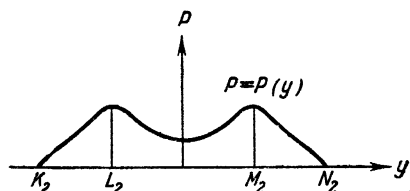
$$p(x, y) = \frac{2u^2 \rho \beta_0 \operatorname{tg} \alpha^*}{\pi} \times \left\{ -\arcsin \frac{\operatorname{ctg} \alpha^* B_1 y + B_2 f_1 + 2a_1 b_1 \operatorname{ctg} \alpha^* \sqrt{B_1 - f_1^2}}{x B_1} + \right. \\ \left. + \arcsin \frac{\operatorname{ctg} \alpha^* B_1 y + B_2 f_2 - 2a_1 b_1 \operatorname{ctg} \alpha^* \sqrt{B_1 - f_2^2}}{x B_1} \right\}, \quad (7.10)$$

где  $f_2 = x - y \operatorname{ctg} \alpha^*$  и  $B_1, B_2, f_1, f_2$  имеют те же значения,

что и в формуле (7.9). На фиг. 36 и 37 даны графики распределения давления соответственно в сечениях  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ , параллельных оси  $Oy$  и на фиг. 38 и 39 даны графики распределения давления соответственно в сечениях

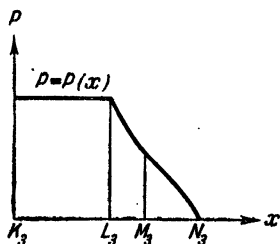


Фиг. 36.

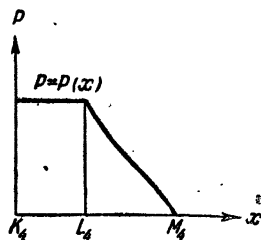


Фиг. 37.

$A_3B_3$  и  $A_4B_4$ , параллельных оси  $Ox$ . Сечения  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  указаны на фиг. 40, сечения  $A_3B_3$  и  $A_4B_4$  указаны на фиг. 35.



Фиг. 38.



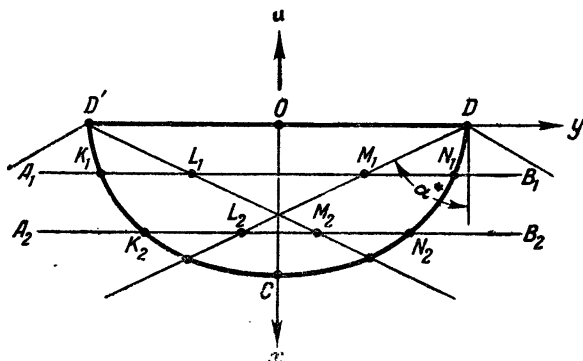
Фиг. 39.

Если полуоси эллипса заданы специальным образом, именно, между полуосями существует соотношение  $a_1 = b_1 \operatorname{ctg} \alpha^*$ , то формула (7.9) распределения давления в области VI упрощается и принимает вид

$$p(x, y) = u^2 \rho \beta_0 \operatorname{tg} \alpha^* \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\operatorname{ctg} \alpha^* y + \sqrt{2a_1^2 - (x + \operatorname{ctg} \alpha^* y)^2}}{x} \right\}. \quad (7.11)$$

Это отвечает случаю, когда характеристические конусы с вершинами в точках  $D$  и  $D'$  пересекают заднюю кромку крыла на оси симметрии крыла в точке  $C$ , следовательно, область  $V$  на крыле отсутствует.

В общем случае обтекания полуэллиптического крыла может оказаться, что на поверхности крыла в области  $V$  на некоторой кривой разность давлений сверху и снизу крыла обращается в нуль. Ниже по потоку от этой кривой на поверхности крыла разность давлений становится отрицательной.



Фиг. 40.

Уравнение линии нулевого давления найдём, приравнявая правую часть формулы (7.10) нулю

$$\begin{aligned} & [(a_1^2 + b_1^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha^*)^4 + (a_1^2 - b_1^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha^*)^2 4a_1^2 b_1^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha^*] x^2 + \\ & + [(a_1^2 - b_1^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha^*)^2 4a_1^2 b_1^2 \operatorname{ctg}^4 \alpha^* + 16a_1^4 b_1^3 \operatorname{ctg}^6 \alpha^*] y^2 = \\ & = 4a_1^2 b_1^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha^* (a_1^2 - b_1^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha^*)^2 (a_1^2 + b_1^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha^*). \end{aligned}$$

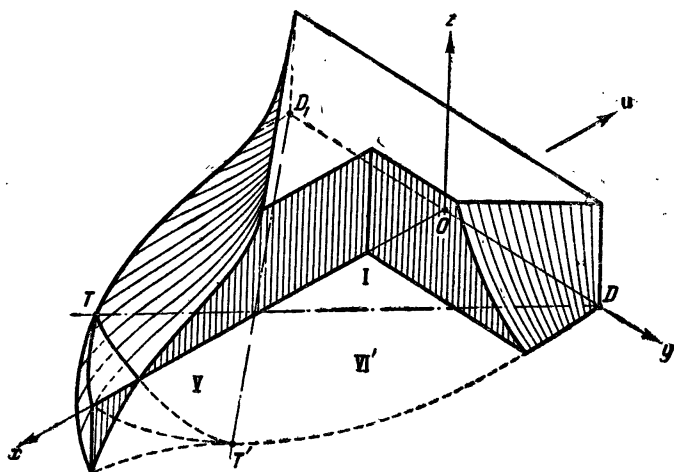
После очевидных преобразований искомое геометрическое место представим в следующем окончательном виде:

$$\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1, \quad (7.12)$$

где

$$a_2 = \frac{2a_1 b_1 \operatorname{ctg} \alpha^*}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha^*}}; \quad b_2 = \frac{a_1^2 - b_1^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha^*}{\operatorname{ctg} \alpha^* \sqrt{a_1^2 + b_1^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha^*}}. \quad (7.13)$$

Эти результаты показывают, что линия нулевого давления представляет собой дугу эллипса, полуоси которого  $a_2$  и  $b_2$  связаны соотношением (7.13) с полуосями  $a_1$  и  $b_1$  эллипса, дугой которого является задняя кромка крыла. По направлению полуоси  $a_2$  и  $b_2$  совпадают с полуосями эллипса  $a_1$  и  $b_1$ . Для того чтобы линия нулевого давления не проходила через поверхность крыла, дуга эллипса, образующая контур крыла,



Фиг. 41.

не должна иметь действительных точек пересечения с кривой (7.12), определяющей линию нулевого давления. Сопоставляя уравнения (7.8) и (7.12), получаем следующий результат: для того чтобы при движении со сверхзвуковой скоростью  $u$  плоского крыла полуэллиптической формы в плане линия нулевого давления не проходила через поверхность крыла, необходимо и достаточно, чтобы геометрические параметры крыла удовлетворяли условию

$$a_1 \leq \sqrt{3} b_1 \operatorname{ctg} \alpha^*. \quad (7.14)$$

На фиг. 41 построена в изометрии поверхность давления над полуэллиптическим крылом в общем случае, когда на поверхности крыла существуют все области I, VI, VI' и V и когда условие (7.14) не выполняется.

### III. Полукруглое крыло

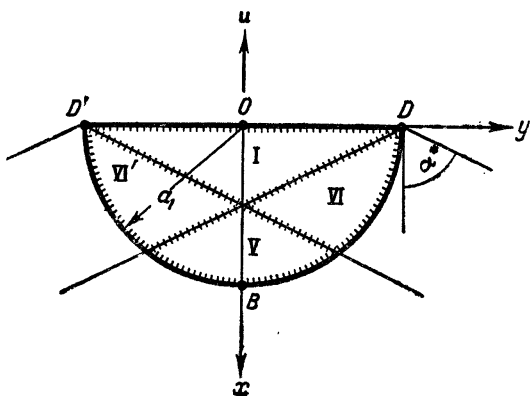
Рассмотрим крыло полукруглой формы в плане. Пусть задан радиус  $a_1$  крыла и пусть крыло движется в направлении оси симметрии, как указано на фиг. 42. Уравнение передней кромки крыла в характеристических координатах имеет вид

$$y_1 = -x_1$$

и уравнение задней кромки крыла в тех же координатах

$$y_1 = \frac{(1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha^*) x_1 \pm 2 \operatorname{ctg} \alpha^* \sqrt{a_1^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha^*) - x_1^2}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha^*}$$

Будем предполагать, что крыло плоское и наклонено под углом  $\beta_0$  к направлению движения, т. е. условие обтекания на крыле задано в виде (7.1).



Фиг. 42.

Рассмотрим обтекание полукруглого крыла, когда характеристические конусы с вершинами в точках  $D$  и  $D'$  пересекаются на поверхности крыла. Поверхность крыла разобьём на характерные области  $I$ ,  $VI$ ,  $VI'$  и  $V$ , как показано на фиг. 42. Эти области определены в примере II. В области  $I$  давление потока на поверхность крыла постоянно и выражается формулой (7.2). Полагая в формулах (7.9) и (7.10) величину  $b_1 = a_1$ , найдём распределение давления на поверх-

ности полукруглого крыла в областях VI и V соответственно в виде

$$p(x, y) = u^2 \rho \beta_0 \operatorname{tg} \alpha^* \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\operatorname{ctg} \alpha^* B_1 y + B_2 f_1 + 2 \operatorname{ctg} \alpha^* \sqrt{a_1^2 B_1 - f_1^2}}{x B_1} \right\} \quad (7.15)$$

и

$$p(x, y) = -\frac{2u^2 \rho \beta_0 \operatorname{tg} \alpha^*}{\pi} \times \left\{ \arcsin \frac{\operatorname{ctg} \alpha^* B_1 y + B_2 f_2 + 2 \operatorname{ctg} \alpha^* \sqrt{a_1^2 B_1 - f_1^2}}{x B_1} - \arcsin \frac{\operatorname{ctg} \alpha^* B_1 y + B_2 f_2 - 2 \operatorname{ctg} \alpha^* \sqrt{a_1^2 B_1 - f_1^2}}{x B_1} \right\}, \quad (7.16)$$

где

$$B_1 = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha^*; B_2 = 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha; f_1 = x + y \operatorname{ctg} \alpha^*; f_2 = x - y \operatorname{ctg} \alpha^*.$$

В общем случае обтекания полукруглого крыла через поверхность крыла может проходить линия нулевого давления. Уравнение этой линии найдём из уравнения (7.12) как частный случай при  $b_1 = a_1$ .

$$\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1, \quad (7.17)$$

где

$$a_2 = 2a_1 \cos \alpha^*; b_2 = a_1 (\operatorname{tg}^2 \alpha^* - 1) \cos \alpha^*. \quad (7.18)$$

Эти результаты показывают, что линия нулевого давления является дугой эллипса, центр которого совпадает с центром окружности, дугой которого образована задняя кромка крыла, и одна из осей которого совпадает с осью симметрии крыла. Для полукруглого крыла условие (7.14) равносильно условию

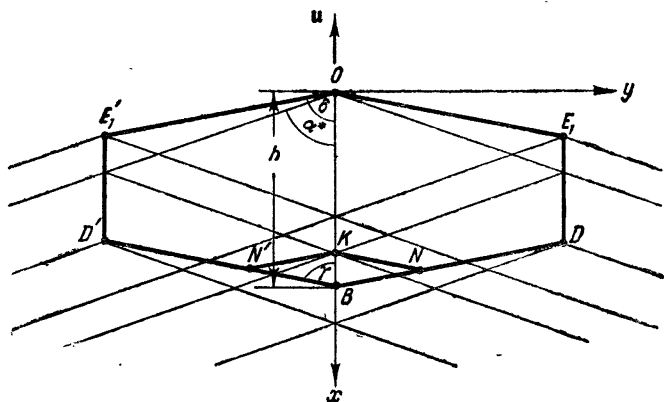
$$u \geq \frac{2}{\sqrt{3}} a. \quad (7.19)$$

Следовательно, для того чтобы при движении со сверхзвуковой скоростью плоского крыла полукруглой формы в плане линия нулевого давления не проходила через поверхность

крыла, необходимо и достаточно, чтобы скорость  $u$  движения крыла была не меньше  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  скорости звука  $a$  в невозмущённом потоке.

#### IV. Шестиугольное крыло<sup>1)</sup>

Рассмотрим крыло шестиугольной формы в плане, изображённое на фиг. 43. Пусть передняя кромка крыла образована прямыми  $OE_1$  и  $OE'_1$ , концевые кромки крыла образованы прямыми  $E_1D$  и  $E'_1D'$  и параллельны направлению



Фиг. 43.

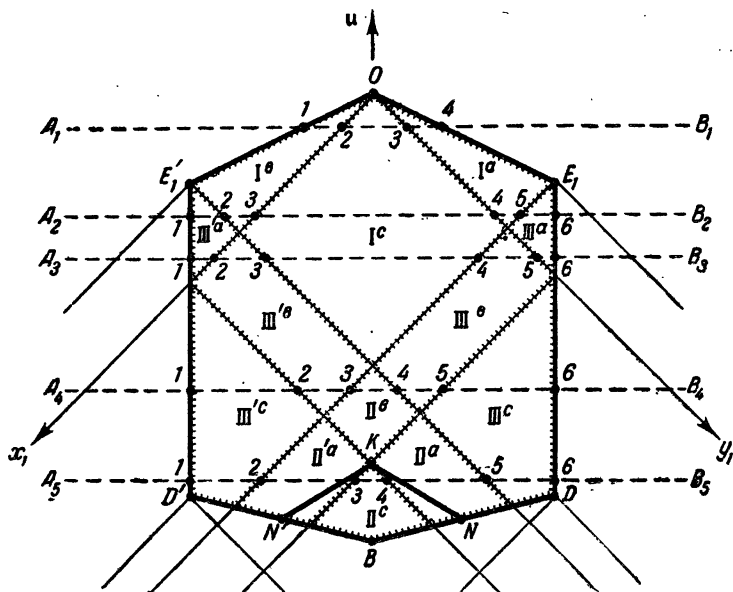
набегающего потока; задние кромки крыла образованы прямыми  $DB$  и  $D'B$ . В преобразованном к характеристическим координатам пространстве это крыло имеет в плане вид, изображённый на фиг. 44.

Зададим следующие геометрические параметры: угол  $\sigma$  — угол наклона передней кромки крыла к направлению набегающего потока; угол  $\gamma$  — угол наклона задней кромки крыла к тому же направлению; полуразмах  $l$  и хорду  $h$ .

Рассмотрим крыло, у которого углы  $\sigma$  и  $\gamma$  удовлетворяют неравенствам  $\sigma > \alpha^*$  и  $\gamma > \alpha^*$ . Первое неравенство

<sup>1)</sup> Результаты для шестиугольного крыла получены студенткой М. М. Прилуко.

означает, что поверхность крыла выходит за пределы характеристического конуса с вершиной в точке  $O$ . Второе неравенство означает, что поверхность крыла расположена вне сферы влияния вихревой пелены, простирающейся за крылом.



Фиг. 44.

Уравнения прямых, образующих контур крыла, имеют вид  
Отрезок  $OE_1$

$$y = x \operatorname{tg} \sigma$$

или в характеристических координатах

$$y_1 = \frac{1}{m} x_1,$$

где

$$m = \frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \sigma}{1 + \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \sigma},$$

при этом,  $m < 0$ , так как по условию  $\delta > \alpha^*$ ;  
отрезок  $OE'_1$

$$y = -x \operatorname{tg} \sigma \text{ или } y_1 = m x_1;$$

отрезок  $E_1D$

$$y = l \quad \text{или} \quad y_1 = x_1 + 2 \operatorname{ctg} \alpha^* \cdot l;$$

отрезок  $E'_1D'$

$$y = -l \quad \text{или} \quad y_1 = x_1 - 2 \operatorname{ctg} \alpha^* \cdot l;$$

отрезок  $DB$

$$y = -x \operatorname{tg} \gamma + h \operatorname{tg} \gamma \quad \text{или} \quad y_1 = \frac{1}{m_1} x_1 + n_1$$

и, наконец, отрезок  $D'B$  задан уравнением

$$y = x \operatorname{tg} \gamma - h \operatorname{tg} \gamma \quad \text{или} \quad y_1 = m_1 x_1 + n_2,$$

где:

$$m_1 = \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \gamma}; \quad n_1 = \frac{2h \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \gamma}; \quad n_2 = \frac{2h \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{ctg} \alpha^* \operatorname{tg} \gamma}.$$

В соответствии с изложенным в § 5 поверхность крыла разобьём на 13 характерных областей с различным аналитическим характером решения задачи (фиг. 44).

Предполагая, что поверхность крыла плоская, зададим условие обтекания в виде (7.1) и вычислим давление в каждой характерной области. Ниже мы приводим результаты вычисления давления на поверхности крыла в виде формул, уже преобразованных к первоначальной системе координат.

В областях  $I^a$  и  $I^b$  давление постоянно и выражается формулой (7.2). В области  $I^c$  давление выражается в виде

$$p(x, y) = \frac{2u^2 \rho \beta_0}{\pi \sqrt{-m \operatorname{ctg} \alpha^*}} \left\{ -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{-m}} \sqrt{\frac{x - \operatorname{ctg} \alpha^* y}{x + \operatorname{ctg} \alpha^* y}} - \operatorname{arctg} \sqrt{-m} \sqrt{\frac{x - \operatorname{ctg} \alpha^* y}{x + \operatorname{ctg} \alpha^* y}} \right\}. \quad (7.20)$$

Отсюда следует, что в области  $I^c$  вдоль каждого луча, исходящего из точки  $O$ , давление сохраняет постоянное значение. В области  $III^a$

$$p(x, y) = \frac{2u^2 \rho \beta_0 (1 - m)}{\pi \sqrt{-m \operatorname{ctg} \alpha^*}} \times \\ \times \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2 \operatorname{ctg} \alpha^* (l - y)}{(m - 1)(x + \operatorname{ctg} \alpha^* y) + 2l \operatorname{ctg} \alpha^*}}. \quad (7.21)$$

В области III<sup>b</sup>

$$p(x, y) = \frac{2u^2\rho\beta_0(m-1)}{\pi\sqrt{-m}\operatorname{ctg}\alpha^*} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{-m}} \sqrt{\frac{x - \operatorname{ctg}\alpha^*y}{x + \operatorname{ctg}\alpha^*y}} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2\operatorname{ctg}\alpha^*(l-y)}{(1-m)(x + \operatorname{ctg}\alpha^*y) + 2l\operatorname{ctg}\alpha^*}} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \sqrt{-m} \sqrt{\frac{x - \operatorname{ctg}\alpha^*y}{x + \operatorname{ctg}\alpha^*y}} \right\}. \quad (7.22)$$

В области III<sup>c</sup>

$$p(x, y) = \frac{2u^2\rho\beta_0(1-m)}{\pi\sqrt{-m}\operatorname{ctg}\alpha^*} \times \\ \times \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2m\operatorname{ctg}\alpha^*(y-l)}{(1-m)(x + \operatorname{ctg}\alpha^*y) + 2ml\operatorname{ctg}\alpha^*}}. \quad (7.23)$$

В области II<sup>a</sup>

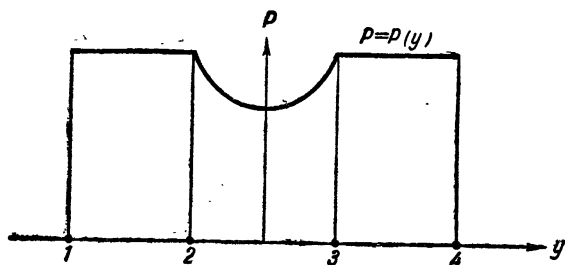
$$p(x, y) = \\ = \frac{2u^2\rho\beta_0(1-m)}{\pi\sqrt{-m}\operatorname{ctg}\alpha^*} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2m\operatorname{ctg}\alpha^*(y-l)}{(1-m)(x + \operatorname{ctg}\alpha^*y) + 2ml\operatorname{ctg}\alpha^*}} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(1-m)(x - \operatorname{ctg}\alpha^*y) - 2l\operatorname{ctg}\alpha^*}{2\operatorname{ctg}\alpha^*(l+y)}} \right\}. \quad (7.24)$$

В области II<sup>b</sup>

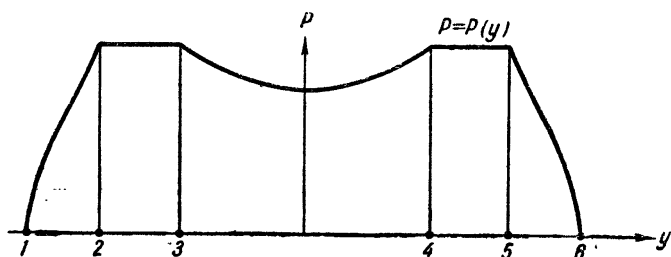
$$p(x, y) = \frac{2u^2\rho\beta_0(1-m)}{\pi\sqrt{-m}\operatorname{ctg}\alpha^*} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{-m}} \sqrt{\frac{x - \operatorname{ctg}\alpha^*y}{x + \operatorname{ctg}\alpha^*y}} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2\operatorname{ctg}\alpha^*(l-y)}{(1-m)(x + \operatorname{ctg}\alpha^*y) - 2l\operatorname{ctg}\alpha^*}} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(1-m)(x + \operatorname{ctg}\alpha^*y) - 2l\operatorname{ctg}\alpha^*}{2\operatorname{ctg}\alpha^*(l+y)}} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \sqrt{-m} \sqrt{\frac{x - \operatorname{ctg}\alpha^*y}{x + \operatorname{ctg}\alpha^*y}} \right\}. \quad (7.25)$$

В области II<sup>c</sup>

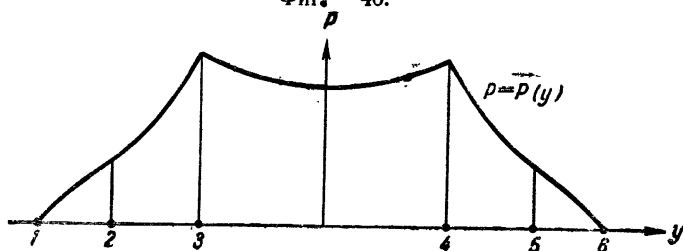
$$p(x, y) = \\ = \frac{2u^2\rho\beta_0(m-1)}{\pi\sqrt{-m}\operatorname{ctg}\alpha^*} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{-m}} \sqrt{\frac{(1-m)(x - \operatorname{ctg}\alpha^*y) + 2ml\operatorname{ctg}\alpha^*}{2\operatorname{ctg}\alpha^*(l+y)}} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{-m}} \sqrt{\frac{x - \operatorname{ctg}\alpha^*y}{x + \operatorname{ctg}\alpha^*y}} + \operatorname{arctg} \sqrt{-m} \sqrt{\frac{x - \operatorname{ctg}\alpha^*y}{x + \operatorname{ctg}\alpha^*y}} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \sqrt{-m} \sqrt{\frac{2\operatorname{ctg}\alpha^*(l-y)}{(1-m)(x + \operatorname{ctg}\alpha^*y) + 2ml\operatorname{ctg}\alpha^*}} \right\}. \quad (7.26)$$



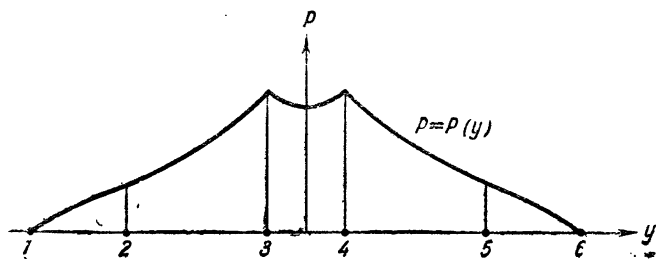
Фиг. 45.



Фиг. 46.

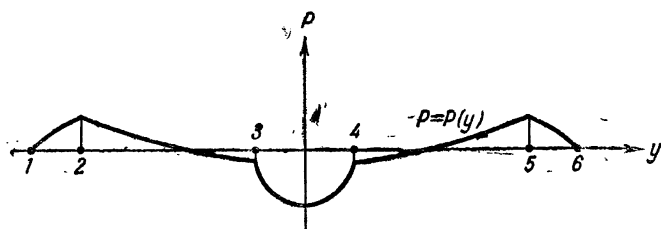


Фиг. 47.

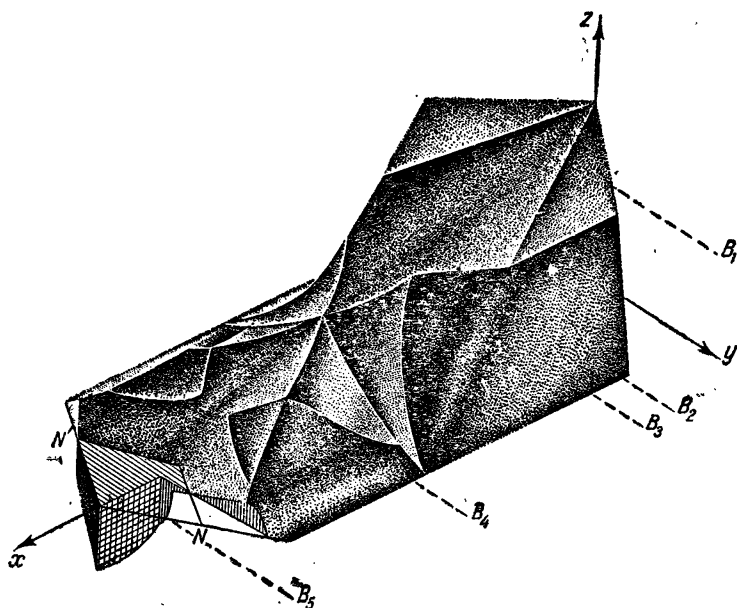


Фиг. 48.

В областях III<sup>a</sup>, III<sup>b</sup>, III<sup>c</sup> и II<sup>a</sup> формулы для распределения давления на поверхности крыла могут быть получены соответственно из формул (7.21), (7.22), (7.23) и (7.24), если



Фиг. 49.



Фиг. 50.

в них соответствующим образом поменять ролями координаты.

Формулы для давления показывают, что на поверхности крыла проходит линия нулевого давления, от которой ниже по потоку разность давления снизу и сверху крыла стано-

вится отрицательной. Эта линия образована двумя отрезками  $KN$  и  $KN'$ , уравнения которых соответственно имеют вид

$$v = x \operatorname{tg} \delta - 2l \operatorname{tg} \alpha^* \operatorname{tg} \sigma, \quad y = -x \operatorname{tg} \delta + 2l \operatorname{tg} \alpha^* \operatorname{tg} \sigma. \quad (7.27)$$

и которые параллельны отрезкам  $E_1O$  и  $E_1'O$ , образующим переднюю кромку крыла.

Линия нулевого давления может быть легко построена графическим путём, изложенным в § 5.

На фиг. 45, 46, 47, 48, 49 даны графики распределения давления соответственно в сечениях  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$  и  $A_5B_5$ , параллельных оси  $Oy$ . Эти сечения указаны на фиг. 44.

На фиг. 50 представлена в изометрии поверхность давления над плоским крылом шестиугольной формы в плане.

## ГЛАВА III

### ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КРЫЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

#### § 1. Основная формула для потенциала скорости при гармонических колебаниях крыла

Перейдем к рассмотрению малых гармонических колебаний крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью.

Полученные в §§ 2 и 3 гл. I результаты приложим к изучению обтекания крыла, когда добавочные, неустановившиеся движения крыла являются гармоническими колебаниями, т. е. функция  $f$  задана в виде

$$f(t + a) = \operatorname{Re} e^{i\omega t + ia'} \quad (1.1)$$

Следовательно, условие (1.6) гл. I обтекания на поверхности крыла для добавочного потока, обусловленного гармоническими колебаниями крыла, имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \operatorname{Re} A_1(x, y) e^{i\omega t + ia'(x, y)} = \operatorname{Re} A_2(x, y) e^{i\omega t}, \quad (1.2)$$

где функция  $A_2(x, y)$  определяет амплитуду и начальную фазу колебаний в каждой точке поверхности крыла.

Пользуясь формулой

$$\begin{aligned} e^{\frac{i\omega a}{u^2 - a^2} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2(y - \eta)^2 - k^2 z^2}} + e^{-\frac{i\omega a}{u^2 - a^2} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2(y - \eta)^2 - k^2 z^2}} = \\ = 2 \cos \left\{ \frac{\omega a}{u^2 - a^2} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2(y - \eta)^2 - k^2 z^2} \right\} \end{aligned}$$

и соотношением (3.5) гл. I, которое при гармонических колебаниях крыла имеет вид

$$C(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} e^{-[i\omega t + ia'(x, y)]} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\}_{z=0}$$

а также полагая в формуле (3.1) гл. I произвольную функцию  $\alpha(x, y)$  равной  $\frac{\alpha'(x, y)}{\omega}$ , получим основную формулу для потенциала скорости в виде<sup>1)</sup>

$$\varphi_1(x, y, z, t) = -\frac{1}{\pi} e^{\beta x} \int \int_{S(x, y, z)} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\}_{z=0} \times \\ \times e^{-\beta \xi} \frac{\cos [\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2 - k^2 z^2}]}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2 - k^2 z^2}} d\eta d\xi, \quad (1.3)$$

где положено  $\lambda = \frac{\omega a}{u^2 - a^2}$ ,  $\beta = -\frac{i\omega u}{u^2 - a^2}$ . Область интегрирования  $S$  есть часть плоскости  $xu$ , которая лежит внутри характеристического конуса с вершиной в точке с координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Формула (1.3) устанавливает зависимость между потенциалом скорости  $\varphi_1$  в произвольной точке пространства и нормальной к плоскости  $xu$  производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  при гармонических колебаниях крыла.

Потенциал скорости  $\varphi_1$  может быть вычислен по формуле (1.3) в тех точках пространства, для которых область интегрирования  $S$  не выходит за пределы крыла, где нормальная скорость  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  задана.

## § 2. Гармонические колебания крыла бесконечного размаха

Рассмотрим крыло бесконечного размаха с хордой длиной  $l$  (фиг. 51). Пусть на основное движение крыла, состоящее в прямолинейном поступательном движении со сверхзвуковой скоростью  $u$ , наложены добавочные гармонические колебания малой амплитуды с частотой  $\omega$ . В этих колебательных движениях поверхность крыла может деформироваться. Будем считать, что на обеих сторонах поверхности крыла нормальная составляющая скорости задана по закону

$$v_n = -u\beta_0 + \operatorname{Re} A_1 e^{i\omega t + i\alpha'} = -u\beta_0 + \operatorname{Re} A_2 e^{i\omega t}, \quad (2.1)$$

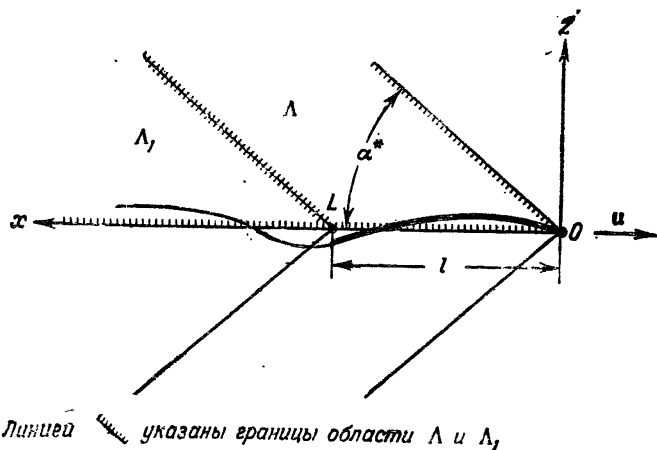
<sup>1)</sup> Во всех выражениях гл. III следует подразумевать действительную часть.

где первое слагаемое соответствует установившемуся движению крыла, а второе слагаемое — добавочным гармоническим колебаниям крыла. Заданные на поверхности крыла функции  $\beta_0$  и  $A_2$  изменяются вдоль хорды и сохраняют постоянное значение вдоль размаха крыла.

Представляя потенциал скорости  $\varphi$  абсолютного движения жидкости рассматриваемой плоской задачи в виде

$$\varphi(x, z, t) = \varphi_0(x, z) + \varphi_1(x, z, t)$$

и рассуждая так же, как и в § 1 гл. I при постановке пространственной задачи, придём к следующей краевой задаче



Фиг. 51.

для потенциала скорости  $\varphi_1$ , происходящего от гармонических колебаний профиля: найти функцию  $\varphi_1(x, z, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$(u^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial t^3} - 2u \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} = 0 \quad (2.2)$$

и краевым условиям на оси  $Ox$  (фиг. 51). При этом на проекции профиля на ось  $Ox$ , т. е. на отрезке, где  $0 \leq x \leq l$ , должно выполняться условие

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \operatorname{Re} A_2(x) e^{i\omega t}. \quad (2.3)$$

На проекции на ось  $Ox$  линии разрыва потенциала скорости за крылом, т. е. на оси  $Ox$ , где  $l \leq x < \infty$ , должно выполняться условие (1.10) гл. I

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0. \quad (2.4)$$

На волне возмущения — на характеристиках, пересекающихся в передней кромке крыла

$$\varphi_1(x, z, t) = 0.$$

Кроме того, как и в пространственной задаче, имеет место условие симметрии

$$\varphi_1(x, -z, t) = -\varphi_1(x, z, t),$$

следовательно, достаточно решить задачу для верхней полуплоскости.

Решение этой краевой задачи содержится, как частный случай, в формуле (1.3), если в ней считать производную  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  функцией переменных  $x$  и  $t$  и переменные интегрирования считать изменяющимися в пределах

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi \leq x - kz \\ \eta_1 = y - \frac{1}{k} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} \leq \eta \leq y + \\ + \frac{1}{k} \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} = \eta_2. \end{aligned}$$

При этих предположениях формула (1.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, z, t) = -\frac{1}{\pi} e^{\beta x} \int_0^{x-kz} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\}_{z=0} \times \\ \times e^{-\beta \xi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\cos \{ \lambda \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 (y - \eta)^2 - k^2 z^2} \}}{\sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 (y - \eta)^2 - k^2 z^2}} d\eta d\xi. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Путём подстановки

$$k(y - \eta) = \sqrt{(x - \xi)^2 - k^2 z^2} \cos \theta$$

внутренний интеграл легко вычисляется

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\cos \{ \lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2 - k^2 z^2} \}}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2 - k^2 z^2}} d\eta = \\ = \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos \{ \lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - k^2 z^2} \sin \theta \} d\theta = \\ = \frac{\pi}{k} I_0 \{ \lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - k^2 z^2} \}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $I_0$  — функция Бесселя нулевого порядка. Подставляя результат (2.6) в выражение (2.5), получим формулу для потенциала скорости в виде

$$\varphi_1(x, z, t) = -\frac{1}{k} e^{\beta x} \int_0^{x-kz} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\}_{z=0} e^{-\beta \xi} I_0 \{ \lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - k^2 z^2} \} d\xi. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) устанавливает зависимость между потенциалом скорости  $\varphi_1$  в произвольной точке плоскости  $xz$  и нормальной к оси  $Ox$  производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  в случае плоской задачи.

Полагая в формуле (2.7) частоту  $\omega$  колебания профиля равной нулю, получим формулу для потенциала скорости

$$\varphi_0(x, z) = -\frac{1}{k} \int_0^{x-kz} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\}_{z=0} d\xi \quad (2.8)$$

при установившемся движении профиля. В случае плоской пластинки, наклонённой под малым углом атаки  $\alpha_0$ , на отрезке  $\overline{OL}$  имеем:  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = -u\alpha_0$  и, следовательно,

$$\varphi_0(x, z) = -\frac{u\alpha_0(x-kz)}{k}. \quad (2.9)$$

Результаты (2.8) и (2.9) впервые были получены Аккеретом <sup>1)</sup> и Прандтлем <sup>2)</sup>.

1) См. работу Аккерета, цитированную на стр. 9.

2) См. работу Прандтля за 1936 г., цитированную на стр. 9.

Потенциал скорости  $\varphi_1$  можно вычислить по формуле (2.7) в тех точках плоскости  $xz$ , для которых интервал интегрирования на оси  $Ox$  не выходит за пределы крыла, т. е. в той части  $\Delta$  плоскости  $xz$  (фиг. 51), где не сказывается влияние вихрей, сбегающих с задней кромки крыла, так как нормальная скорость  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  задана только на крыле.

Для того чтобы вычислить потенциал скорости по формуле (2.7) в той части  $\Delta_1$  плоскости  $xz$ , для точек которой интервал интегрирования выходит за пределы крыла, необходимо из краевого условия (2.4) определить нормальную скорость всюду за крылом на оси  $Ox$ .

Выразим по формуле (2.7) в любой точке  $N(x)$ , расположенной на оси  $Ox$  за крылом, потенциал скорости  $\bar{\varphi}_1(x)$

$$\bar{\varphi}_1(x) = -\frac{1}{k} e^{\beta x} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\}_{z=0} e^{-\beta \xi} I_0 \{ \lambda (x - \xi) \} d\xi. \quad (2.10)$$

С другой стороны, согласно условию (2.4) потенциал скорости  $\bar{\varphi}_1(x)$  всюду за крылом на оси  $Ox$  равен выражению

$$\bar{\varphi}_1(x) = \bar{\varphi}_1(l) e^{-\frac{i\omega}{u}(x-l)}, \quad (2.11)$$

где  $l$  — координата задней кромки крыла. Сопоставляя соотношения (2.10) и (2.11), получим интегральное уравнение

$$\int_l^{\infty} \Phi(\xi) I_0 \{ \lambda (x - \xi) \} d\xi = F(x), \quad (2.12)$$

которому удовлетворяет функция  $\Phi(x) = \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\}_{z=0} e^{-\beta x}$  за крылом. Функция  $F$  в уравнении (2.12) является известной

$$F(x) = -k\varphi_1(l) e^{\frac{i\omega}{u}k^2} - \int_0^l \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\}_{z=0} e^{-\beta \xi} I_0 \{ \lambda (x - \xi) \} d\xi.$$

В переменных  $\xi_1 = \xi - l$  и  $x_1 = x - l$  уравнение (2.12) имеет вид

$$\int_0^{\infty} \Phi(\xi) I_0 \{ \lambda(x - \xi) \} d\xi = F(x), \quad (2.13)$$

где индекс «1» при переменных опущен.

Решим интегральное уравнение (2.13).

Для непрерывных дифференцируемых функций  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  будем требовать абсолютную сходимость интегралов

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma x} F(x) dx \quad \text{при } \sigma > a_1 \quad (2.14)$$

и

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma x} \Phi(x) dx \quad \text{при } \sigma > a_2, \quad (2.15)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — действительные положительные числа.

Левая часть уравнения (2.13) является складкой функций  $I_0(\lambda x)$  и  $\Phi(x)$  по определению складки<sup>1)</sup>.

Складкой двух функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  называется функция  $\varphi_3(x)$ , определённая равенством  $\varphi_3(x) = \int_0^x \varphi_1(t) \varphi_2(x-t) dt$ .

Принято обозначать складку функций символом  $\varphi_3(x) = \varphi_1(x) * \varphi_2(x)$ .

В связи с этим левую часть уравнения (2.13) запишем в виде

$$\int_0^{\infty} \Phi(\xi) I_0 \{ \lambda(x - \xi) \} d\xi = I_0(\lambda x) * \Phi(x). \quad (2.16)$$

Складка  $I_0(\lambda x) * \Phi(x)$  определена и непрерывна при  $x \geq 0$ , так как функции  $I_0(\lambda x)$  и  $\Phi(x)$  определены и непрерывны на том же интервале. На основании (2.16) и (2.13) получим соотношение

$$F(x) = I_0(\lambda x) * \Phi(x), \quad (2.17)$$

<sup>1)</sup> См. Смирнов В. И., Курс высшей математики, том IV, 1941.

связывающее функции  $F(x)$ ,  $I_0(\lambda x)$  и  $\Phi(x)$  всюду на оси  $Ox$  при  $x \geq 0$ .

Применим к (2.17) одностороннее преобразование Лапласа

$$\int_0^{\infty} e^{-s\omega} F(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-s\omega} I_0(\lambda x) * \Phi(x) dx, \quad (2.18)$$

где  $s$  — комплексное переменное. Вследствие условия (2.15) и аналогичного условия, которому удовлетворяет функция  $I_0(\lambda x)$ , интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-s\omega} I_0(\lambda x) dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-s\omega} \Phi(x) dx,$$

являются регулярными всюду в полуплоскости  $\sigma > a_3$ , где  $a_3$  — наибольшее из чисел  $a_1$  и  $a_2$ . Таким образом, преобразование Лапласа, применённое к функциям  $I_0(\lambda x)$  и  $\Phi(x)$ , является сходящимся. Следовательно, оно сходится в той же полуплоскости, будучи применённым к складке этих функций, т. е. имеет место теорема свёртывания:

$$\int_0^{\infty} e^{-s\omega} I_0(\lambda x) * \Phi(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-s\omega} I_0(\lambda x) dx \int_0^{\infty} e^{-s\omega} \Phi(x) dx. \quad (2.19)$$

В соответствии с соотношением (2.19) соотношение (2.18) преобразуется к виду

$$\int_0^{\infty} e^{-s\omega} F(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-s\omega} I_0(\lambda x) dx \int_0^{\infty} e^{-s\omega} \Phi(x) dx. \quad (2.20)$$

Известно <sup>1)</sup>, что

$$\int_0^{\infty} e^{-s\omega} I_0(\lambda x) dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}}. \quad (2.21)$$

<sup>1)</sup> См. Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, ГНТИ, 1935.

Эта формула справедлива при  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . Отсюда имеем, что  $\sigma > a_3 \geq 0$ .

Подставляя (2.21) в (2.20), получим вместо уравнения (2.13) новое интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \Phi(x) dx = \sqrt{\lambda^2 + s^2} \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx, \quad (2.22)$$

которому удовлетворяет функция  $\Phi(x)$ .

Будем искать решение уравнения (2.22) в виде суммы двух функций

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x), \quad (2.23)$$

где функция  $\Phi_1(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \Phi_1(x) dx = s \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx. \quad (2.24)$$

Интегрируя правую часть уравнения (2.24) по частям и имея в виду граничное условие  $F(0) = 0$ , найдём функцию  $\Phi_1$  в виде

$$\Phi_1(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (2.25)$$

Для того чтобы получить уравнение для функции  $\Phi_2$ , в правой части уравнения (2.22) прибавим и отнимем член  $s \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx$ , тогда, имея в виду уравнение (2.24), получим уравнение

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \Phi_2(x) dx = \{\sqrt{\lambda^2 + s^2} - s\} \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx, \quad (2.26)$$

которому удовлетворяет функция  $\Phi_2$ .

Обозначим правую часть уравнения (2.26) через  $\Psi(s)$ . Заметим, что функция  $\Psi(s)$  будет регулярной для любого значения  $\sigma > a$  (причём  $s = \sigma + i\tau$ ),  $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \Psi(s) = 0$  и интеграл

$\int_0^{\infty} |\Psi(\sigma + i\tau)| d\tau$  сходится. Применяя к функции  $\Psi(s)$

обращённое преобразование Лапласа

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} \Psi(s) ds,$$

получим решение уравнения (2.26) в виде

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ (V\lambda^2 + s^2 - s) \int_0^\infty F(\xi) e^{s(x-\xi)} d\xi \right\} ds. \quad (2.27)$$

Разобьём интервал интегрирования по  $\xi$  на две части

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ (V\lambda^2 + s^2 - s) \int_0^x F(\xi) e^{s(x-\xi)} d\xi \right\} ds + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ (V\lambda^2 + s^2 - s) \int_x^\infty F(\xi) e^{s(x-\xi)} d\xi \right\} ds \quad (2.28) \end{aligned}$$

и покажем, что второе слагаемое обращается в нуль.

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (V\lambda^2 + s^2 - s) \int_x^\infty F(\xi) e^{s(x-\xi)} d\xi ds = \\ & = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{AB} (V\lambda^2 + s^2 - s) \int_x^\infty F(\xi) e^{s(x-\xi)} d\xi ds \right\}. \quad (2.29) \end{aligned}$$

Контурный интеграл

$$\oint_{ABE} (V\lambda^2 + s^2 - s) \int_x^\infty F(\xi) e^{s(x-\xi)} d\xi ds$$

по замкнутому контуру равен нулю, так как подынтегральная функция регулярна внутри сегмента  $ABE$  (фиг. 52). Следовательно, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{AB} (V\lambda^2 + s^2 - s) \int_x^\infty F(\xi) e^{s(x-\xi)} d\xi ds + \right. \\ \left. + \int_{BEA} (V\lambda^2 + s^2 - s) \int_x^\infty F(\xi) e^{s(x-\xi)} d\xi ds \right\} = 0. \end{aligned}$$

Если во втором члене этого равенства представить переменное  $s$  в виде  $s = R \cos \psi + iR \sin \psi$  и принять во внимание, что  $\cos \psi > 0$  при  $-\frac{1}{2}\pi < \psi < \frac{1}{2}\pi$  и  $x - \xi < 0$ , т. е. при  $\xi > x$ , то нетрудно убедиться в том, что этот член равен нулю.

Первое слагаемое решения (2.28) с помощью контурных интегралов преобразуется к виду

$$\Phi_2(x) = \frac{\lambda^2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\xi) d\xi \int_{-1}^{+1} e^{t\lambda(x-\xi)t} \sqrt{1-t^2} dt. \quad (2.30)$$

Применим к (2.30) известное в теории бесселевых функций соотношение

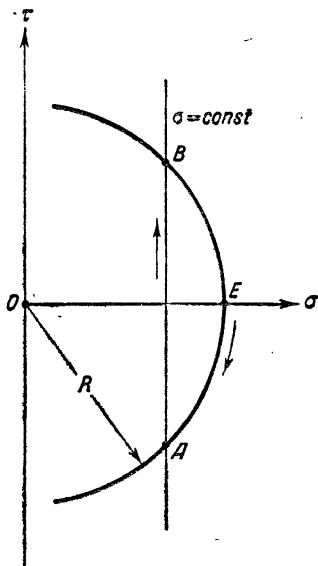
$$I_1\{\lambda(x-\xi)\} = \frac{\lambda(x-\xi)}{\pi} \times \int_{-1}^{+1} e^{t\lambda(x-\xi)t} \sqrt{1-t^2} dt, \quad (2.31)$$

где  $I_1$  — функция Бесселя первого порядка. Тогда получим

$$\Phi_2(x) = \lambda \int_0^{\infty} F(\xi) \frac{I_1\{\lambda(x-\xi)\}}{x-\xi} d\xi. \quad (2.32)$$

Таким образом, формула обращения интегрального уравнения (2.13) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \\ &= \frac{dF}{dx} + \lambda \int_0^{\infty} F(\xi) \frac{I_1\{\lambda(x-\xi)\}}{x-\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (2.33)$$



Фиг. 52.

Имея в виду формулу обращения (2.33), по формуле (2.7) теперь можно вычислить потенциал скорости  $\varphi_1$  в любой точке плоскости  $xz$ .

Впервые плоскую задачу о гармонических колебаниях крыла в сверхзвуковом потоке иным методом решил Борбели <sup>1)</sup>. При решении задачи Борбели предположил крыло недеформируемым, т. е. колеблющимся, как твёрдое тело.

### § 3. Концевой эффект.

#### Построение и решение интегрального уравнения

Вернёмся к изучению потока воздуха, возбуждённого движением колеблющегося крыла конечного размаха. Для того чтобы по формуле (1.3) вычислить потенциал скорости для тех точек  $M(x, y, z)$  пространства, для которых область интегрирования  $S$  выходит за пределы поверхности крыла, необходимо из граничных условий на плоскости  $xu$  определить нормальную к плоскости  $xu$  производную  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  всюду в области интегрирования  $S$ .

Отметим на контуре крыла характерные точки:  $E_1$ ,  $E'_1$ ,  $D$  и  $D'$ . Точка  $E_1$  на передней кромке крыла определяется тем, что влево от неё выполняется условие (3.7) гл. I, вправо от неё это условие нарушено. Точка  $E'_1$  определяется тем, что вправо от неё выполняется условие (3.7), влево от неё это условие нарушено. Это означает, что в точках  $E_1$  и  $E'_1$  образующие характеристических конусов касаются контура крыла. Точки  $D$  и  $D'$  соответственно являются крайней правой и крайней левой точками на контуре крыла (фиг. 6).

Рассмотрим вначале простейший случай проявления концевого эффекта. Пусть для некоторой точки  $M(x, y, z)$  область интегрирования  $S$  в формуле (1.3) пересекается с поверхностью крыла и с областью  $\sigma_1$  (фиг. 6). Область  $\sigma_1$  есть область, расположенная справа вне крыла внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $E_1$  и вне характеристических конусов с вершинами в точках  $E'_1$  и  $D$ . Область  $\sigma_1$  принадлежит определённой ранее области  $\Sigma_2$  (см. фиг. 1).

Построим интегральное уравнение для функции  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  в области  $\sigma_1$ . Выразим по основной формуле (1.3) в произвольной точке  $N(x, y, 0)$ , расположенной в области  $\sigma_1$ , потен-

<sup>1)</sup> См. работу Борбели, цитированную на стр. 9.

циал скорости  $\varphi_1$ , равный нулю всюду в области  $\Sigma_2$ , согласно условию (1.12) гл. I. Область интегрирования  $S$  разобьём на две части, как показано на фиг. 7: на области  $s$  и  $\sigma$ . Область  $s$  есть часть крыла, попадающая внутрь характеристического конуса с вершиной в точке  $N$ . В области  $s$  согласно условию (1.2) производная  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  задана. Область  $\sigma$  есть часть области  $\sigma_1$ , попадающей внутрь того же конуса. В этой области производная  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  является неизвестной величиной. Таким образом мы придём к интегральному уравнению, которому удовлетворяет функция  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  в области  $\sigma_1$ ,

$$\int_{\sigma(x, y)} \int \theta(\xi, \eta) \frac{\cos[\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2}]}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2}} d\eta d\xi = F(x, y), \quad (3.1)$$

где  $\theta = \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\}_{z=0} e^{-i\omega t - \beta x}$  искомая функция в области  $\sigma_1$  и где известная функция  $F$  определена в виде

$$F = - \int_s \int A_2(\xi, \eta) \frac{\cos[\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2}]}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2}} d\eta d\xi, \quad (3.2)$$

причем  $A_2 = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} e^{-i\omega t - \beta x}$  в области  $s$ . Введём характеристические координаты  $x_1, y_1$  и  $z_1$  с началом в точке  $O$  по формулам

$$x_1 = x - ky, \quad y_1 = x + ky, \quad z_1 = kz. \quad (3.3)$$

В новых координатах интегральное уравнение (3.1) существенно упрощается и принимает вид

$$\int_{\sigma(x_1, y_1)} \int \theta^{(1)}(\xi_1, \eta_1) \frac{\cos[\lambda \sqrt{(x_1-\xi_1)(y_1-\eta_1)}]}{\sqrt{(x_1-\xi_1)(y_1-\eta_1)}} d\eta_1 d\xi_1 = F^{(1)}(\xi_1, \eta_1), \quad (3.4)$$

где неизвестная функция

$$\theta^{(1)}(x_1, y_1) = \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \right\}_{z_1=0} e^{-i\omega t - \beta \frac{x_1 + y_1}{2}}$$

и известная функция

$$F^{(1)}(x_1, y_1) = - \int_s \int A(\xi_1, \eta_1) \frac{\cos[\lambda \sqrt{(x_1-\xi_1)(y_1-\eta_1)}]}{\sqrt{(x_1-\xi_1)(y_1-\eta_1)}} d\eta_1 d\xi_1, \quad (3.5)$$

причём

$$A(x_1, y_1) = \frac{1}{k} A_2 \left[ \frac{x_1 + y_1}{2}; \frac{y_1 - x_1}{2k} \right] e^{-\beta \frac{x_1 + y_1}{2}}.$$

Переменные интегрирования в области  $\sigma$  изменяются в пределах

$$x_{1e} \leq \xi_1 \leq x_1, \quad \psi(\xi_1) \leq \eta_1 \leq y_1.$$

где  $y_1 = \psi(x_1)$  — уравнение концевой кромки крыла — дуги  $E_1 D$  контура крыла в преобразованных координатах; а  $x_{1e}$  — абсцисса определённой выше точки  $E_1$  контура крыла в тех же координатах (фиг. 6).

Нормальная к плоскости  $xu$  скорость  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  возмущённого потока связана с производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}$  соотношением

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = k \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}.$$

Ниже в §§ 3, 4, 5 и 6 для краткости индекс «1» при переменных всюду опущен.

Будем искать решение уравнения (3.4) в виде степенного ряда

$$\theta^{(1)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n^{(1)}(x, y) \omega^n. \quad (3.6)$$

Представим в обеих частях уравнения (3.4)

$$\cos[\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2n} [(x-\xi)(y-\eta)]^n \omega^{2n}. \quad (3.7)$$

Имея в виду абсолютную сходимость рядов (3.6) и (3.7), перемножим их почленно, после чего получим ряд

$$\begin{aligned} & \theta^{(1)}(\xi, \eta) \cos[\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}] = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n-k}}{[2(u-k)]!} \left[ \frac{a}{n^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \theta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $m = \frac{n}{2}$ , если  $n$  — число чётное и  $m = \frac{n+1}{2}$ , если  $n$  — число нечётное.

Аналогично получаем ряд

$$A(\xi, \eta) \cos[\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=m}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2-a^2} \right]^{2(n-k)} A_{2k-n}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k}. \quad (3.9)$$

Подставляя ряды (3.8) и (3.9) в уравнение (3.4), представим последнее в виде

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \int_{\psi(\xi)}^y \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=m}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2-a^2} \right]^{2(n-k)} \times \\ \times \theta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi = \\ = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \int_{\psi_1(\xi)}^{\psi(\xi)} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=m}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k+1}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2-a^2} \right]^{2(n-k)} \times \\ \times A_{2k-n}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi. \quad (3.10)$$

Принимая во внимание равномерную сходимость рядов в обеих частях уравнения (3.10) относительно переменных  $\xi$  и  $\eta$ , интегрируем их почленно, после чего получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=m}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2-a^2} \right]^{2(n-k)} \times \\ \times \int_{\alpha_0}^{\alpha} \int_{\psi(\xi)}^y \theta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=m}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k+1}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2-a^2} \right]^{2(n-k)} \times \\ \times \int_{\alpha_0}^{\alpha} \int_{\psi_1(\xi)}^{\psi(\xi)} A_{2k-n}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi. \quad (3.11)$$

Сравнивая в уравнении (3.11) коэффициенты при одинаковых степенях  $\omega$ , получим интегральные уравнения, которым удовлетворяют функции  $\theta_n^{(1)}(x, y)$ :

$$\int_{x_0}^x \int_{\psi(\xi)}^y \theta_n^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} = F_n^{(1)}(x, y), \quad (3.12)$$

где

$$F_n^{(1)}(x, y) = \sum_{k=m}^{k=n} \bar{f}_n^k(x, y) + \sum_{k=m}^{k=n-1} f_n^{(1)k}(x, y), \quad (3.13)$$

а  $\bar{f}_n^k$  и  $f_n^{(1)k}$ , в свою очередь, выражаются так:

$$\begin{aligned} \bar{f}_n^k &= \frac{(-1)^{n-k+1}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \times \\ &\times \int_{x_0}^x \int_{\psi_1(\xi)}^{\psi(\xi)} A_{2k-n}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi \quad (3.14) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f_n^{(1)k} &= \frac{(-1)^{n-k+1}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \times \\ &\times \int_{x_0}^x \int_{\psi(\xi)}^y \theta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi, \quad (3.15) \end{aligned}$$

причём функция  $f_n^{(1)k}$  определена для  $n > 1$ . Правая часть  $F_n^{(1)}$  уравнения (3.12) для функции  $\theta_n^{(1)}$  зависит от коэффициентов  $\theta_j^{(1)}$ , но только для индексов  $j \leq n-2$ . Следовательно, если уже найдены коэффициенты разложения  $\theta_j^{(1)}$  для индексов  $j \leq n-2$ , то функция  $F_n^{(1)}$  является известной функцией в уравнении, которому удовлетворяет коэффициент  $\theta_n^{(1)}$  в общем члене ряда (3.6). При  $n=0$  в уравнении (3.12) правая часть

$$F_0^{(1)} = \bar{f}_0^0 = - \int_{x_0}^x \int_{\psi_1(\xi)}^{\psi(\xi)} A_0(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(x-\eta)}} \quad (3.16)$$

является известной функцией от  $x$  и  $y$ .

Решим интегральное уравнение (3.12) относительно функции  $\theta_n^{(1)}$ . Двумерное интегральное уравнение (3.12) равносильно двум одномерным интегральным уравнениям

$$\int_{x_0}^x \frac{\theta_n^*(\xi, y)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi = F_n^{(1)}(x, y) \quad (3.17)$$

и

$$\int_{\psi(\xi)}^y \frac{\theta_n^{(1)}(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = \theta_n^*(\xi, y), \quad (3.18)$$

каждое из которых сводится к уравнению Абеля. Пользуясь формулой обращения интегрального уравнения Абеля и замечая при этом, что для любых  $n$  функция  $F_n^{(1)}(x_0, y) = 0$ , решение уравнения (3.17) относительно функции  $\theta_n^*$  представим в виде

$$\theta_n^* = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^x \frac{F_{n\xi}^{(1)}(\xi, y)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi. \quad (3.19)$$

Обратимся к уравнению (3.18). Параметр  $\xi$  обозначим через  $x$ . Пользуясь ещё раз формулой обращения интегрального уравнения Абеля и имея при этом в виду, что согласно решению (3.19) при  $y = \psi(x)$  правая часть  $\theta_n^*[x, \psi(x)]$  уравнения (3.18) отлична от нуля, решение уравнения (3.18) относительно функции  $\theta_n^{(1)}$  представим в виде

$$\theta_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \frac{\theta_n^*[x, \psi(x)]}{\sqrt{y-\psi(x)}} + \frac{1}{\pi} \int_{\psi(x)}^y \frac{\theta_{n\eta}^*(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta. \quad (3.20)$$

Подставляя в решение (3.20) вместо функции  $\theta_n^*$  её значение из формулы (3.19), получим решение интегрального уравнения (3.12) в следующем виде

$$\theta_n^{(1)} = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{y-\psi(x)}} \int_{x_0}^x \frac{F_{n\xi}^{(1)}[\xi, \psi(x)]}{\sqrt{x-\xi}} d\xi + \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_{x_0}^x \int_{\psi(x)}^y \frac{F_{n\xi\eta}^{(1)}(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi. \quad (3.21)$$

Итак, по формуле (3.21) можно вычислить последовательно все коэффициенты разложения  $\theta_n^{(1)}$ .

Формула (3.21) показывает, что все коэффициенты  $\theta_n^{(1)}$  при  $y = \psi(x)$ , т. е. на концевой кромке  $E_1D$  крыла обращаются в бесконечность, как  $r^{-1/2}$ , где  $r$  — расстояние точки с координатами  $x$  и  $y$  до дуги  $E_1D$  контура крыла. Следовательно, скорость возмущённого потока обращается в бесконечность указанного порядка на концевой кромке крыла при подходе к ней извне крыла.

Формулу обращения (3.21) интегрального уравнения (3.12) можно представить и в таком виде:

$$\theta_n^{(1)} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{x_0}^x \int_{\psi(x)}^y \frac{F_n^{(1)}(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi, \quad (3.22)$$

в чём нетрудно убедиться путём дифференцирования по параметрам  $x$  и  $y$ .

Таким образом мы построили решение интегрального уравнения (3.4) в виде степенного ряда (3.6), абсолютно и равномерно сходящегося относительно переменных  $x$  и  $y$  для любых значений параметра  $\omega$ . Коэффициенты  $\theta_n^{(1)}$  разложения функции

$\theta^{(1)} = \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]_{z=0} e^{-i\omega t - \beta \frac{x+y}{a}}$  в области  $\sigma'_1$  (фиг. 6) в ряд вида

$$\theta^{(1)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n^{(1)}(x, y) \omega^n \quad (3.23)$$

также найдём из формул (3.21) или (3.22), если в последних поменять ролями координаты и вместо функции  $\psi(x)$  подставить функцию  $\bar{\psi}_2(y)$ , где  $x = \bar{\psi}_2(y)$  — уравнение дуги  $E'_1D'$  контура крыла, т. е. уравнение левой концевой кромки крыла в виде, разрешённом относительно координаты  $x$ .

#### § 4. Колеблущееся крыло малого удлинения

Рассмотрим обтекание крыла, когда характеристические конусы с вершинами в точках  $E_1$  и  $E'_1$  пересекают крыло, как указано на фиг. 11. Пусть линии пересечения этих конусов с плоскостью  $xu$  многократно отражаются от концевых кромок крыла. Точки отражения обозначим буквами  $E_2, E_3, \dots$

...,  $E_n$ , ... и  $E'_2, E'_3, \dots, E'_n, \dots$ . Характеристические конусы с вершинами в точках  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  и в точках  $E'_1, E'_2, \dots, E'_n, \dots$  разделяют пространство, в частности плоскость  $xu$ , на ряд областей с различным аналитическим характером решения задачи. Плоскость  $xu$ , где среда возмущена, разделяется на области  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ . Область  $S_n$  есть  $M$ -образная область, расположенная внутри характеристических конусов с вершинами в точках  $E_n$  и  $E'_n$  или внутри одного из них и вне характеристических конусов с вершинами в точках  $E_{n+1}$  и  $E'_{n+1}$ . В свою очередь, часть плоскости  $xu$ , расположенная справа от крыла, разделяется на полосы  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, \dots$ , а часть плоскости  $xu$ , расположенная слева от крыла, — на полосы  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \dots, \sigma'_n, \dots$ . Полоса  $\sigma_n$  лежит внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $E_n$  и вне конуса с вершиной в точке  $E_{n+1}$ . Таким образом  $\sigma_n$  есть часть области  $S_n$ , расположенная справа от крыла;  $\sigma'_n$  — часть области  $S_n$ , расположенная слева от крыла.

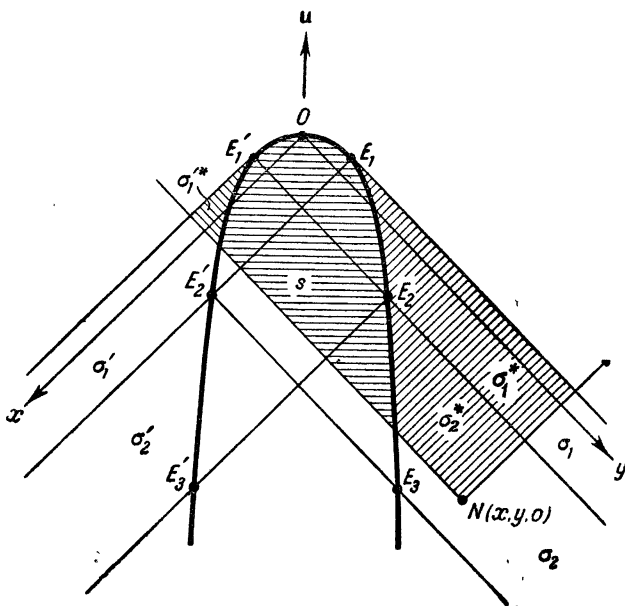
Обратимся к основной формуле (1.3) для потенциала скорости, которая в характеристических координатах имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z, t) = \\ = -\frac{1}{2\pi} e^{\beta \frac{\alpha+y}{2}} \int \int_{S(x, y, z)} \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]_{z=0} e^{-\beta \frac{\xi+\eta}{2}} \frac{\cos[\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)-z^2}} d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для того чтобы по этой формуле вычислить потенциал скорости в той части пространства, или, в частности, на поверхности крыла, для точек которой область интегрирования  $S(x, y, z)$  пересекается с областью  $S_n$  плоскости  $xu$ , прежде всего следует определить производную вне крыла в полосах  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ , а также в полосах  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \dots, \sigma'_n$ .

Обозначим функцию  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} e^{-i\omega t - \beta \frac{\alpha+y}{2}}$  в полосах  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, \dots$  соответственно через  $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}, \dots, \theta^{(n)}, \dots$  и в полосах  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \dots, \sigma'_n, \dots$  через  $\theta'^{(1)}, \theta'^{(2)}, \theta'^{(3)}, \dots, \theta'^{(n)}, \dots$ . Значения производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  в полосах  $\sigma_1$  и  $\sigma'_1$  найдены выше согласно решениям (3.6) и (3.23).

Построим интегральное уравнение для функции  $\theta^{(2)}$ . Выразим по основной формуле (4.1) в точке  $N(x, y, 0)$ , расположенной в полосе  $\sigma_2$  (фиг. 53), потенциал скорости, равный нулю всюду в полосах  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$ , а также в полосах  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n, \dots$ .



Фиг. 53.

Область интегрирования  $S$  разобьем на части  $s, \sigma_1^*, \sigma_1'^*$  и  $\sigma_2^*$  в зависимости от аналитического вида функции  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} e^{-i\omega t + \beta \frac{x+y}{2}}$ . В области  $s$  на крыле эта функция задана. В частях  $\sigma_1^*$  и  $\sigma_1'^*$  области  $S$ , принадлежащих полосам  $\sigma$  и  $\sigma'_1$ , эта функция определена решениями (3.6) и (3.23). В части  $\sigma_2^*$  области  $S$ , принадлежащей полосе  $\sigma_2$ , она обозначена через  $\theta^{(2)}$ . Таким же путем, как и для функции  $\theta^{(1)}$ , получим интегральное уравнение, которому удовлетворяет

функция  $\theta^{(2)}$

$$\int_{\sigma_2^*(x, y)} \int \theta^{(2)}(\xi, \eta) \frac{\cos [\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi = F^{(2)}(x, y), \quad (4.2)$$

где известная функция  $F^{(2)}$  определена в виде

$$\begin{aligned} F^{(2)} = & - \int_{\sigma(x, y)} \int A(\xi, \eta) \frac{\cos [\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi - \\ & - \int_{\sigma_1^*(x, y)} \int \theta^{(1)}(\xi, \eta) \frac{\cos [\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi - \\ & - \int_{\sigma_1'^*(x, y)} \int \theta'^{(1)}(\xi, \eta) \frac{\cos [\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Решение интегрального уравнения (4.2) также построим в виде степенного ряда

$$\theta^{(2)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n^{(2)}(x, y) \omega^n. \quad (4.4)$$

Проводя далее рассуждения, аналогичные рассуждениям предыдущего параграфа, получим для коэффициента  $\theta_n^{(2)}$  в общем члене ряда (4.4) интегральное уравнение вида (3.12) с правой частью

$$F_n^{(2)}(x, y) = \sum_{k=n}^{k=n} f_n^k(x, y) + \sum_{k=m}^{k=n-1} f_n^{(2)k}(x, y), \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} f_n^k = & \frac{(-1)^{n-k+1}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \times \\ & \times \left\{ \int_{\sigma} \int A_{2k-n}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-\frac{1}{2}} d\eta d\xi + \right. \\ & + \int_{\sigma_1^*} \int \theta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-\frac{1}{2}} d\eta d\xi + \\ & \left. + \int_{\sigma_1'^*} \int \theta_{2k-n}'^{(1)}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-\frac{1}{2}} d\eta d\xi \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

и

$$f_n^{(2)k} = \frac{(-1)^{n-k+1}}{[2(n-k)]!} \times \\ \times \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \int \int_{\sigma_n^*(x, y)} \theta_{2k-n}^{(2)}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\xi d\eta. \quad (4.7)$$

Принимая во внимание условие на границе  $F_n^{(2)}(x'_e, y) = 0$  для любого номера  $n$  (где  $x'_e$  — координата точки  $E_2$ ), решение интегрального уравнения для коэффициента  $\theta_n^{(2)}$  получим, пользуясь решением (3.21) или (3.22) уравнения (3.12) как готовыми формулами, если в них вместо функции  $F_n^{(1)}$  вставить функцию  $F_n^{(2)}$ , а вместо координаты  $x_e$  подставить координату  $x'_e$ .

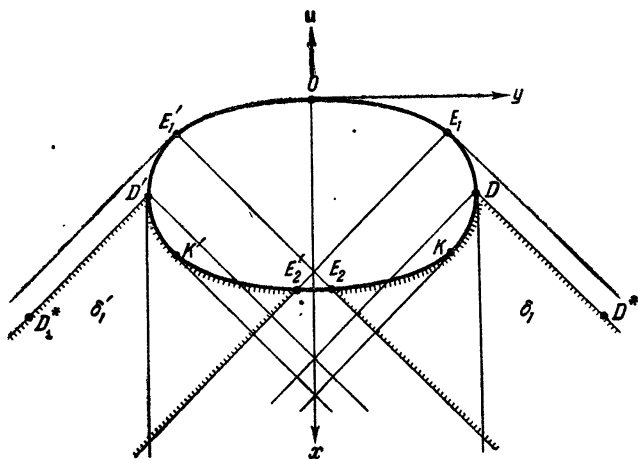
Функция  $F_n^{(2)}$  зависит от коэффициентов  $\theta_j^{(2)}$ , но только для индексов  $j \leq n-2$ . Следовательно, как и в предыдущем параграфе, если уже найдены коэффициенты разложения  $\theta_j^{(2)}$  для  $j \leq n-2$ , то функция  $F_n^{(2)}$  является известной величиной. Таким образом, можно последовательно найти функции  $\theta_n^{(2)}$  для любого номера  $n$ .

Функция  $\theta^{(n)}$  в полосовой области  $\sigma_n$  удовлетворяет также уравнению вида (3.4) с правой частью  $F^{(n)}$ , зависящей от функций  $\theta^{(i)}$  для  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Решения этих уравнений также строятся в виде степенных рядов, абсолютно и равномерно сходящихся относительно переменных  $x$  и  $y$  для любых значений параметра  $\omega$ . Коэффициент разложения  $\theta_j^{(n)}$  в общем члене ряда для функции  $\theta^{(n)}$  удовлетворяет уравнению вида (3.12), правая часть которого зависит от коэффициентов разложения  $\theta_r^{(n)}$  функции  $\theta^{(n)}$  для  $r \leq n-2$  и от коэффициентов разложения  $\theta_r^{(1)}, \theta_r^{(2)}, \dots, \theta_r^{(n-1)}$  функций  $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(n-1)}$  для индексов  $r \leq j$ .

Таким образом, последовательно идя вниз по потоку строятся указанным путём решения в рядах для производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  в полосовых областях  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$  и в областях  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n, \dots$

### § 5. Влияние вихревой системы за крылом при гармонических колебаниях крыла

Рассмотрим случай, когда область интегрирования  $S$  в основной формуле (1.3) для потенциала скорости пересекается с вихревой пеленой  $\Sigma_1$ , как указано на фиг. 54, т. е. рассмотрим случай, когда на точку  $M(x, y, z)$  пространства влияет задняя кромка крыла — дуга  $D'E'_2K'KE_2D$  контура крыла, или, как говорят, влияет вихревая пелена,

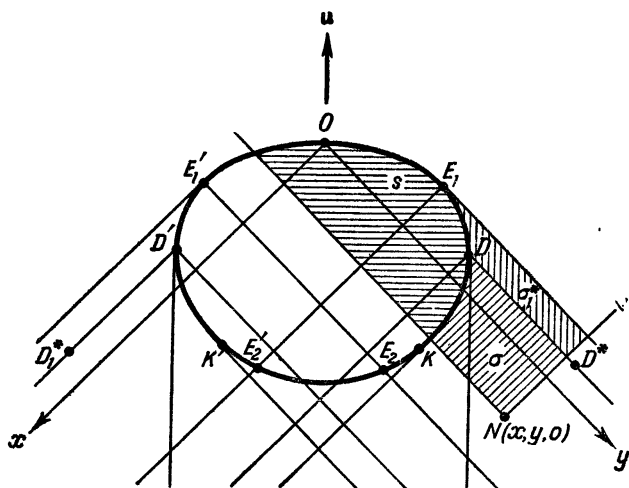


Фиг. 54.

простирающаяся за крылом. Отмеченные на фиг. 54 точки  $D$ ,  $D'$ ,  $E_2$  и  $E'_2$  определены в §§ 3 и 4.

Рассмотрим вначале простейший случай влияния вихревой пелены. Используя условие (1.10) гл. I и принцип Чаплыгина-Жуковского, определим производную  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  в области  $\delta_1$  на плоскости  $xu$ . Область  $\delta_1$  расположена вне крыла внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $D$  и вне характеристического конуса с вершиной в точке  $E'_1$ . Точка  $K$  на задней кромке крыла определена тем, что влево от неё выполняется условие (3.8) гл. I, вправо от неё это условие нарушено. Соответственно определяется точка  $K'$ . Это озна-

часть, что в точках  $K$  и  $K'$  образующие характеристических конусов касаются контура крыла. Область  $\delta_1$  имеет общую часть с вихревой пеленой  $\Sigma_1$ . Исследование проведем в характеристических координатах  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$ , введенных по формулам (3.3). Для краткости индекс «1» при переменных, как и выше, будем опускать.



Фиг. 55.

Условие (1.10) гл. I, выполняющееся на вихревой пелене  $\Sigma_1$ , в характеристических координатах имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + u \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0. \quad (5.1)$$

Из условия (5.1) следует, что функция

$$\varphi_\omega = \varphi_1(x, y, 0, t) e^{i \frac{\omega}{u} \frac{x+y}{2}}$$

всюду на вихревой пелене сохраняет постоянное значение вдоль прямой, параллельной направлению основного набегающего потока, т. е. вдоль вихревой линии за крылом. Так

как вне поверхности крыла и вне вихревой пелены всюду в плоскости  $xu$  потенциал скорости  $\varphi_1$  равен нулю, то можно утверждать, что функция  $\varphi_\omega$  обладает указанным свойством всюду в области  $\delta_1$ .

Построим уравнение для неизвестной производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  в области  $\delta_1$ . Выразим функцию  $\varphi_\omega$  в произвольной точке  $N(x, y, z)$ , расположенной в области  $\delta_1$ , пользуясь основной формулой для потенциала скорости в форме (4.1). Область интегрирования  $S$  разобьём на три части, как показано на фиг. 55: на области  $s$ ,  $\sigma_1^*$  и  $\sigma$ . Области  $s$  и  $\sigma_1^*$  являются соответственно частями поверхности крыла и определённой выше области  $\sigma_1$ , попадающими внутрь характеристического конуса с вершиной в точке  $N(x, y, 0)$ . Область  $\sigma$  — часть области  $\delta_1$ , попадающая внутрь того же конуса. В области  $\sigma$  переменные интегрирования изменяются в пределах  $x_d \leq \xi \leq x$  и  $\chi(\xi) \leq \eta \leq y$ , где  $x_d$  — абсцисса точки  $D$  и  $y = \chi(x)$  — уравнение дуги  $DK$  контура крыла. Полученное выражение для функции  $\varphi$  дифференцируем по направлению, параллельному вектору скорости набегающего потока. Таким образом мы придём к интегродифференциальному уравнению, которому удовлетворяет функция  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} e^{-i\omega t - \beta \frac{x+y}{2}} = \vartheta^{(1)}(x, y)$  в области  $\delta_1$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_d}^x \int_{\chi(\xi)}^y \vartheta^{(1)}(\xi, \eta) \frac{\cos[\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_d}^x \int_{\chi(\xi)}^y \vartheta^{(1)}(\xi, \eta) \frac{\cos[\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi + \quad (5.2) \\ & + \mu\omega \int_{x_d}^x \int_{\chi(\xi)}^y \vartheta^{(1)}(\xi, \eta) \frac{\cos[\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi = \Phi^{(1)}(x, y), \end{aligned}$$

где  $\mu = -i \frac{a^2}{u(u^2 - a^2)}$  и где известная функция имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(x, y) = & \frac{\partial}{\partial L} \left\{ - \int_{s(x, y)} \int A(\xi, \eta) K_1(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi - \right. \\ & \left. - \int_{\sigma_1^*(x, y)} \int \theta^{(1)}(\xi, \eta) K_1(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi \right\} - \\ & - \mu \omega \int_{s(x, y)} \int A(\xi, \eta) K_1(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi - \\ & - \mu \omega \int_{\sigma_1^*(x, y)} \int \theta^{(1)}(\xi, \eta) K_1(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi, \quad (5.3) \end{aligned}$$

причём  $K_1 = \frac{\cos [\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}$  и операция  $\frac{\partial}{\partial L}$  определена в виде  $\frac{\partial}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ . Функция  $\theta^{(1)}$  найдена в предыдущем параграфе согласно решению (3.6).

Будем искать решение уравнения (5.2) в виде степенного ряда

$$\theta^{(1)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n^{(1)}(x, y) \omega^n. \quad (5.4)$$

Имея в виду абсолютную сходимость ряда (5.4) и пользуясь разложением (3.7) для косинуса, получим

$$\begin{aligned} \theta^{(1)}(\xi, \eta) \cos [\lambda \sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=n}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \theta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) \times \\ \times [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k}, \quad (5.5) \end{aligned}$$

где  $m = \frac{n}{2}$ , если  $n$  число чётное и  $m = \frac{n+1}{2}$ , если  $n$  нечётно.

Подставляя ряд (5.5), а также ряды (3.8) и (3.9) в уравнение (5.2), представим последнее в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_a}^x \int_{\chi(\xi)}^y \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=n}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \theta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) \times \\
 & \times [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi + \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_a}^x \int_{\chi(\xi)}^y \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=n}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{[2(n-k)]!} \times \\
 & \times \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \theta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi + \\
 & + \mu \int_{x_a}^x \int_{\chi(\xi)}^y \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \sum_{k=n}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \theta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) \times \\
 & \times [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi = \frac{\partial}{\partial L} \int \int_{s(x, y)} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=n}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k+1}}{[2(n-k)]!} \times \\
 & \times \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} A_{2k-n}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi + \\
 & + \frac{\partial}{\partial L} \int \int_{\sigma_1^*(x, y)} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=n}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k+1}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \theta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) \times \\
 & \times [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi - \mu \int \int_{s(x, y)} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \sum_{k=n}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{[2(n-k)]!} \times \\
 & \times \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} A_{2k-n}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi - \\
 & - \mu \int \int_{\sigma_1^*(x, y)} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \sum_{k=n}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \theta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) \times \\
 & \times [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi. \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание равномерную сходимость рядов в обеих частях уравнения (5.6) относительно переменных  $\xi$  и  $\eta$ , интегрируем ряды почленно. Затем, имея в виду равномерную сходимость полученных рядов относительно пере-

менных  $x$  и  $y$ , которая также сохраняется и после дифференцирования их, дифференцируем эти ряды почленно по параметрам  $x$  и  $y$ . После всех этих операций в обоих частях полученного уравнения сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях  $\omega$ . Таким образом придём к интегродифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют коэффициенты  $\vartheta_n^{(1)}$  разложения функции  $\vartheta^{(1)}$  в ряд (5.4)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha_a}^{\infty} \int_{\chi(\xi)}^y \vartheta_n^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha_a}^{\infty} \int_{\chi(\xi)}^y \vartheta_n^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} = \Phi_n^{(1)}(x, y), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где функция  $\Phi_n^{(1)}$  определена в виде

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(1)} = & \sum_{k=m}^{k=n} \bar{\varphi}_n^{(1)k}(x, y) + \sum_{k=m}^{k=n-1} \varphi_n^{(1)k}(x, y) + \\ & + \mu \sum_{k=m_1}^{k=n-1} \psi_n^{(1)k}(x, y), \end{aligned} \quad (5.8)$$

здесь  $m_1 = \frac{n}{2}$ , если  $n$  чётное число и  $m_1 = \frac{n-1}{2}$ , если  $n$  нечётно. Функции  $\bar{\varphi}_n^{(1)k}$ ,  $\varphi_n^{(1)k}$  и  $\psi_n^{(1)k}$ , в свою очередь, выражаются так:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_n^{(1)k} = & \frac{(-1)^{n-k+1}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \frac{\partial}{\partial L} \times \\ & \times \left\{ \int_{s(x, y)} \int A_{2k-n}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi + \right. \\ & \left. + \int_{\sigma_1^*(x, y)} \theta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(1)k} = & \frac{(-1)^{n-k+1}}{[2(n-k)]!} \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k)} \frac{\partial}{\partial L} \int_{\sigma(x, y)} \vartheta_{2k-n}^{(1)}(\xi, \eta) \times \\ & \times [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-1/2} d\eta d\xi \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)k} = & \mu \sum_{k=m_1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{[2(n-k-1)]!} \left[ \frac{a}{u^2 - a^2} \right]^{2(n-k-1)} \times \\ & \times \left\{ \int \int_{s(x, y)} A_{2k-n+1}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-3/2} d\eta d\xi + \right. \\ & + \int \int_{\sigma_1^*(x, y)} \theta_{2k-n+1}^{(1)}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-3/2} d\eta d\xi + \\ & \left. + \int \int_{\sigma(x, y)} \vartheta_{2k-n+1}^{(1)}(\xi, \eta) [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-k-3/2} d\eta d\xi \right\}. \end{aligned}$$

При этом, функция  $\varphi_n^{(1)k}$  определена для  $n > 1$  и функция  $\psi_n^{(1)k}$  определена для  $n > 0$ .

Заметим, что правая часть  $\Phi_n^{(1)}$  уравнения (5.7) для функции  $\vartheta_n^{(1)}$  содержит члены с коэффициентами  $\vartheta_j^{(1)}$ , но только для значений индексов  $j \leq n-1$ .

Задача об определении потенциала скорости возмущённого потока в той части пространства, где сказывается влияние вихревой пелены, простирающейся за крылом, будет иметь единственное решение, если производную  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  подчинить дополнительному условию на задней кромке крыла, согласно принципу Чаплыгина-Жуковского. Будем предполагать, что на задней кромке крыла производная  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  является непрерывной функцией. В частности, выполняются условия

$$\vartheta^{(1)}[x, \chi(x)] = A[x, \chi(x)], \quad (5.9)$$

$$\vartheta^{(1)}[x, \chi_2(x)] = A[x, \chi_2(x)] \quad (5.10)$$

соответственно на дугах  $DK$  и  $D'K'$  контура крыла. Функция  $u = \chi_2(x)$  есть уравнение дуги  $D'K'$  контура крыла. Используя условие (5.9), преобразуем уравнение (5.7). Первую квадратуру левой части уравнения (5.7) проинтегрируем по частям по  $\xi$ , вторую квадратуру проинтегрируем по частям по  $\eta$ , после чего произведём дифференцирование соответственно

по параметрам  $x$  и  $y$ . После этих операций уравнение (5.7) примет вид

$$\int_{x_a}^x \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\theta_{n\xi}^{(1)}(\xi, \eta) + \theta_{n\eta}^{(1)}(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi = \Phi_n^*(x, y), \quad (5.11)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n^* = & -\frac{1}{\sqrt{x-x_a}} \int_{\chi(x_a)}^y \frac{\theta_n^{(1)}(x_a, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \\ & + \int_{x_a}^x \frac{\theta_n^{(1)}[\xi, \chi(\xi)]}{\sqrt{(x-\xi)[y-\chi(\xi)]}} \left\{ \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} - 1 \right\} d\xi + \Phi_n^{(1)}(x, y). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Заметим, что первый член в выражении (5.12) — правой части уравнения (5.11) — при  $x = x_a$  обращается в бесконечность.

Обратимся к выражению (5.8) для функции  $\Phi_n^{(1)}$  и выделим из члена, отвечающего значению индекса  $k = n$  в первой сумме, слагаемое

$$-\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma_1^*} \int \frac{\theta_n^{(1)}(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi = R.$$

Эту квадратуру проинтегрируем по частям по  $\xi$ , имея в виду, что переменные интегрирования в области  $\sigma_1^*$  изменяются в пределах  $x_e \leq \xi \leq x_a$ ;  $\psi(\xi) \leq \eta \leq y$  и что  $\theta_n^{(1)}(x_e, y) = 0$ . Затем произведём дифференцирование по параметру  $x$ . Выделенный член  $R$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{\sqrt{x-x_a}} \int_{\psi(x_a)}^y \frac{\theta_n^{(1)}(x_a, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \\ & + \int_{x_a}^{x_e} \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \int_{\psi(\xi)}^y \frac{\theta_n^{(1)}(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Так как производная  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  всюду вне крыла является функцией непрерывной и так как  $\chi(x_d) = \psi(x_d)$ , то имеет место соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{x-x_d}} \int_{\chi(x_d)}^y \frac{\theta_n^{(1)}(x_d, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = \frac{1}{\sqrt{x-x_d}} \int_{\psi(x_d)}^y \frac{\theta_n^{(1)}(x_d, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta. \quad (5.14)$$

Подставляя выражение (5.13) и соотношение (5.14) в формулу (5.12), получим последнюю в виде

$$\begin{aligned} \Phi_n^* &= \int_{x_d}^x \frac{\theta_n^{(1)}[\xi, \chi(\xi)]}{\sqrt{(x-\xi)[y-\chi(\xi)]}} \left\{ \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} - 1 \right\} d\xi + \\ &+ \int_{x_d}^{x_e} \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \int_{\psi(\xi)}^y \frac{\theta_n^{(1)}(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta \right\} d\xi + \Phi_n^{(1)'}(x, y), \end{aligned} \quad (5.15)$$

где

$$\Phi_n^{(1)'} = \Phi_n^{(1)} - R. \quad (5.16)$$

Если уже найдены коэффициенты  $\theta_j^{(1)}$  для всех индексов  $j \leq n-1$ , то функция  $\Phi_n^{(1)'}$  является известной величиной, а следовательно, на основании условия (5.9), является известной и функция  $\Phi_n^*$  — правая часть уравнения (5.11), которому удовлетворяет коэффициент разложения  $\theta_n^{(1)}$  в общем члене ряда (5.4).

При  $n=0$  в уравнении (5.11) правая часть

$$\begin{aligned} \Phi_0^* &= \int_{x_d}^x \frac{\theta_0^{(1)}[\xi, \chi(\xi)]}{\sqrt{(x-\xi)[y-\chi(\xi)]}} \left\{ \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} - 1 \right\} d\xi + \\ &+ \int_{x_d}^{x_e} \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \int_{\psi(\xi)}^y \frac{\theta_0^{(1)}(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta \right\} d\xi - \\ &- \frac{\partial}{\partial L} \int_s \int A_0(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma_1} \int \theta_0^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

является известной функцией от  $x$  и  $y$ .

Решим интегральное уравнение (5.11) относительно функции  $\vartheta_{nx}^{(1)} + \vartheta_{ny}^{(1)}$ . Двумерное интегральное уравнение (5.11) равносильно двум одномерным уравнениям

$$\int_{x_d}^x \frac{\vartheta_n^*(\xi, y)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi = \Phi_n^*(x, y) \quad (5.18)$$

и

$$\int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta_{n\xi}^{(1)}(\xi, \eta) + \vartheta_{n\eta}^{(1)}(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = \vartheta_n^*(\xi, y), \quad (5.19)$$

каждое из которых сводится к уравнению Абеля. Пользуясь формулой обращения интегрального уравнения Абеля, найдём решения уравнений (5.18) и (5.19) соответственно в виде

$$\vartheta_n^*(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\Phi_n^*(x_d, y)}{\sqrt{x-x_d}} + \frac{1}{\pi} \int_{x_d}^x \frac{\Phi_{n\xi}^*(\xi, y)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi \quad (5.20)$$

и

$$\begin{aligned} \vartheta_{n\xi}^{(1)}(\xi, y) + \vartheta_{n\eta}^{(1)}(\xi, y) = \\ = \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta_n^*[\xi, \chi(\xi)]}{\sqrt{y-\chi(\xi)}} + \frac{1}{\pi} \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta_{n\eta}^*(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Подставляя решение (5.20) в соотношение (5.21), предварительно обозначив в последнем параметр  $\xi$  через  $x$ , получим решение уравнения (5.11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vartheta_{nx}^{(1)}(x, y) + \vartheta_{ny}^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\Phi_n^*[x_d, \chi(x)]}{\sqrt{(x-x_d)[y-\chi(x)]}} + \\ + \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{y-\chi(x)}} \int_{x_d}^x \frac{\Phi_{n\xi}^*[\xi, \chi(\xi)]}{\sqrt{x-\xi}} d\xi + \\ + \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x-x_d}} \int_{\chi(x)}^y \frac{\Phi_{n\eta}^*(x_d, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_{x_d}^x \int_{\chi(x)}^y \frac{\Phi_{n\xi\eta}^*(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Интегрируя решение (5.22) вдоль прямой линии, параллельной направлению основного набегающего потока в пределах от точки  $\bar{N}(\bar{x}, \bar{y}, 0)$  до точки  $N(x, y, 0)$ , получим формулу, определяющую коэффициент  $\vartheta_n^{(1)}$  в общем члене ряда (5.4) в виде:

$$\begin{aligned} \vartheta_n^{(1)}(x, y) = & \vartheta_n^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{1}{\pi^2} \int_{\bar{x}}^x \frac{\Phi_n^*[x_d, \chi(x_1)]}{\sqrt{(x_1 - x_d)[x_1 + y - x - \chi(x_1)]}} dx_1 + \\ & + \frac{1}{\pi^2} \int_{\bar{x}}^x \int_{x_d}^{x_1} \frac{\Phi_{n\xi}^*[\xi, \chi(x_1)] d\xi dx_1}{\sqrt{(x_1 - \xi)[x_1 + y - x - \chi(x_1)]}} + \\ & + \frac{1}{\pi^2} \int_{\bar{x}}^x \int_{\chi(x_1)}^{x_1 + y - x} \frac{\Phi_{n\eta}^*(x_d, \eta) d\eta dx_1}{\sqrt{(x_1 - x_d)[x_1 + y - x - \eta]}} + \\ & + \frac{1}{\pi^2} \int_{\bar{x}}^x \int_{x_d}^{x_1} \int_{\chi(x_1)}^{x_1 + y - x} \frac{\Phi_{n\xi\eta}^*(\xi, \eta)}{\sqrt{(x_1 - \xi)(x_1 + y - x - \eta)}} d\eta d\xi dx_1. \quad (5.23) \end{aligned}$$

Если в формуле (5.23) координаты  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  взять как решения уравнений  $\bar{y} - \bar{x} + x - y = 0$  и  $\bar{y} - \chi(\bar{x}) = 0$  и значение функции  $\vartheta_n^{(1)}(\bar{x}, \bar{y})$  определить из условия (5.9) на задней кромке крыла, то найдём  $\vartheta_n^{(1)}$  на вихревой пелене.

Если в той же формуле координаты  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  положить равными  $\bar{x} = x_d$  и  $\bar{y} = y - x + x_d$  и значение функции  $\vartheta_n^{(1)}(\bar{x}, \bar{y})$  приравнять функции  $\vartheta_n^{(1)}$  на прямой  $x = x_d$ , то найдём  $\vartheta_n^{(1)}$  вне вихревой пелены — в области её влияния.

Итак, по формуле (5.23) можно последовательно вычислить коэффициенты  $\vartheta_n^{(1)}$  для любого номера  $n$ . Таким образом мы построили решение интегродифференциального уравнения (5.2) в виде ряда (5.4), абсолютно и равномерно сходящегося для любых значений параметра  $\omega$  и допускающего почленное дифференцирование по обоим переменным  $x$  и  $y$ .

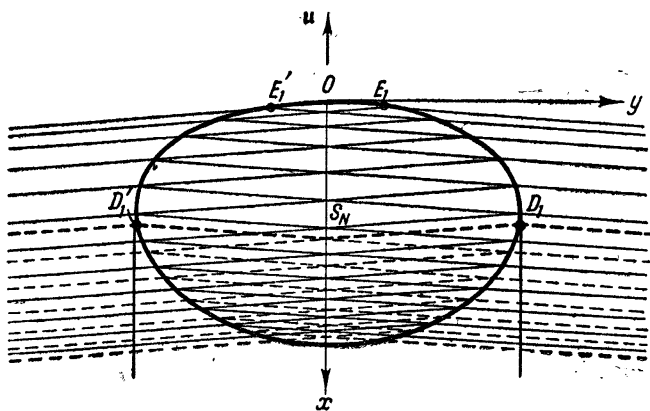
Коэффициенты  $\vartheta_n^{(1)}$  разложения функции  $\vartheta^{(1)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} e^{-i\omega t - \beta \frac{x+y}{2}}$  в области  $\delta'_1$  (фиг. 54) в ряд вида

$$\vartheta^{(1)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n^{(1)}(x, y) \omega^n \quad (5.24)$$

также можно вычислить по формуле (5.23), если в ней поменять ролями координаты и вместо функции  $\chi(x)$  подставить функцию  $\bar{\chi}_2(y)$ , где  $x = \bar{\chi}_2(y)$  — уравнение дуги  $D'K'$  контура крыла в виде, разрешённом относительно координаты  $x$ .

### § 6. Общий случай обтекания крыла сверхзвуковым потоком

Рассмотрим общий случай обтекания крыла сверхзвуковым потоком. Пусть характеристические конусы с вершинами в точках  $E_1$  и  $E'_1$  и в точках  $D_1$  и  $D'_1$  пересекают



Фиг. 56.

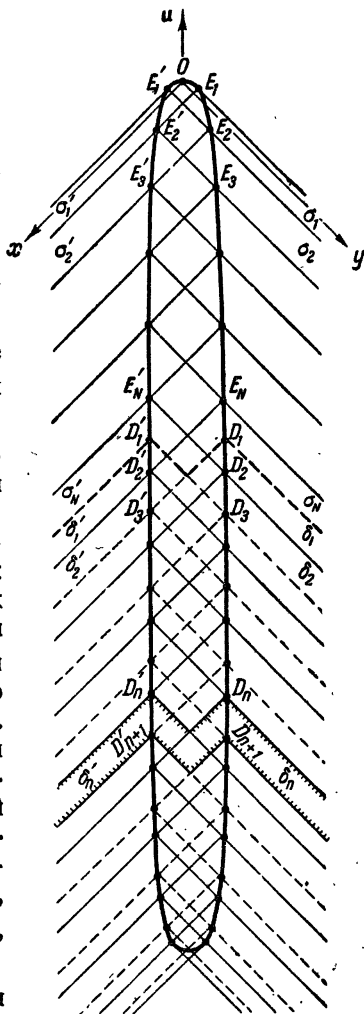
крыло, как показано на фиг. 56. Точки  $E_1$  и  $E'_1$  определены в § 4. Точки  $D_1$  и  $D'_1$  суть соответственно крайняя правая и крайняя левая точки на контуре крыла. В преобразован-

ном по формулам (3.3) пространстве рассматриваемое крыло в плане имеет вид, изображённый на фиг. 57.

Линии пересечения с плоскостью  $xu$  характеристических конусов с вершинами в точках  $E_1$  и  $E'_1$  многократно отражаются от контура крыла. Точки отражения обозначим буквами  $E_2, E_3, \dots, E_N$  и  $E'_2, E'_3, \dots, E'_N$  в области, где не сказывается влияние вихревой пелены, и буквами  $D_2, D_4, \dots, \dots, D_{2k}, \dots$  и  $D'_2, D'_4, \dots, D'_{2k}, \dots$  в области влияния вихревой пелены.

Линии пересечения с плоскостью  $xu$  характеристических конусов с вершинами в точках  $D_1$  и  $D'_1$  в общем случае для крыла произвольной формы в плане также многократно отражаются от контура крыла. На фиг. 56 и 57 эти линии изображены пунктиром. Точки отражения этих линий обозначим буквами  $D$  с нечётными индексами, т. е. посредством  $D_3$  и  $D_5, \dots, D_{2k+1}, \dots$  и  $D'_3, D'_5, \dots, D'_{2k+1}, \dots$

Характеристические конусы с вершинами в точках  $E_1, E_2, \dots, E_N, E'_1, E'_2, \dots, E'_N$  и с вершинами в точках  $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$  и  $D'_1, D'_2, \dots, D'_n, \dots$  разделяют пространство, в частности плоскость  $xu$ , на ряд областей с раз-



Линией  $\cdots\cdots\cdots$  ограничена область  $\Delta_n$

Фиг. 57.

личным аналитическим характером решения задачи. Плоскость  $xu$ , где среда возмущена, разделяется на рассмотренные в предыдущем параграфе области  $S_0, S_1, \dots, S_N$  и на области  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ .

Область  $S_N$  есть  $M$ -образная область, ограниченная снизу по потоку линиями пересечения, характеристических конусов с вершинами в точках  $D_1$  и  $D'_1$  с плоскостью  $xu$ . Эти линии в плоскости  $xu$  ограничивают сверху область влияния вихревой пелены.

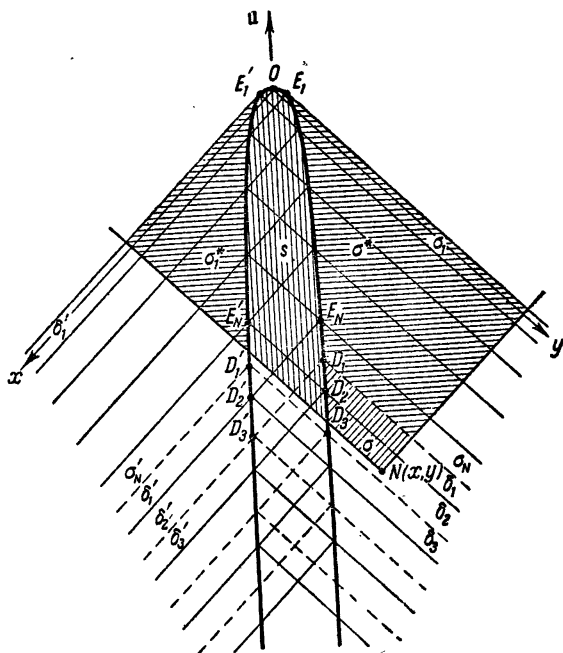
Область  $\Delta_n$  есть  $M$ -образная область, расположенная внутри характеристических конусов с вершинами в точках  $D_n$  и  $D'_n$  и вне конусов с вершинами в точках  $D_{n+1}$  и  $D'_{n+1}$ . В свою очередь, часть плоскости  $xu$ , расположенная справа от крыла, разбивается на определённые выше полосы  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots, \sigma_N$  и на полосы  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ , а расположенная слева от крыла — на полосы  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n, \dots, \sigma'_N$  и на полосы  $\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_n, \dots$ . Полоса  $\delta_n$  находится внутри характеристического конуса с вершиной в точке  $D_n$  и вне конуса с вершиной в точке  $D_{n+1}$ . Таким образом,  $\delta_n$  есть часть области  $\Delta_n$ , расположенная справа от крыла;  $\delta'_n$  — часть области  $\Delta_n$ , расположенная слева от крыла.

Для того чтобы вполне решить задачу обтекания крыла, изображённого на фиг. 56 или 57, необходимо определить производную  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  в полосах  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n, \dots$  и  $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \dots, \delta'_n, \dots$ .

Обозначим функцию  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} e^{-i\omega t - \beta \frac{x+y}{2}}$  в полосах  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n, \dots$  соответственно через  $\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \vartheta^{(3)}, \dots, \vartheta^{(n)}, \dots$  и в полосах  $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \dots, \delta'_n, \dots$  через  $\vartheta'^{(1)}, \vartheta'^{(2)}, \vartheta'^{(3)}, \dots, \vartheta'^{(n)}, \dots$ . В полосах  $\delta_1$  и  $\delta'_1$  производная  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  определена в § 5 решениями (5.4) и (5.24).

Применяя формулу (4.1) для потенциала скорости, построим функцию  $\varphi_\omega$  для любой точки  $N(x, y, 0)$  в полосе  $\delta_2$  (фиг. 58). Область интегрирования  $S$  разобьём на части в зависимости от аналитического вида функции  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} e^{-i\omega t - \beta \frac{x+y}{2}}$ .

В частях области  $S$ , принадлежащих полосам  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \dots, \sigma_N, \sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_N$ , эта функция определена в §§ 3 и 4. В части области  $S$ , принадлежащей полосе  $\delta_1$ , она определена в § 5. В части области  $S$ , принадлежащей полосе  $\delta_2$ , функция  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} e^{-i\omega t - \beta \frac{x+y}{2}}$  является неизвестной; выше мы обозначили её



Фиг. 58.

через  $\vartheta^{(2)}$ . Пользуясь краевыми условиями (1.10) и (1.12) гл. 1, придём к интегродифференциальному уравнению, которому удовлетворяет функция  $\vartheta^{(2)}$  и которое отличается от уравнения (5.2) только видом правой части. Правая часть этого уравнения зависит от решений  $\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \dots, \vartheta^{(N)}, \vartheta'^{(1)}, \vartheta'^{(2)}, \dots, \vartheta'^{(N)}$  и  $\vartheta^{(1)}$ . Решение для функции  $\vartheta^{(2)}$  построим также в виде ряда по степеням параметра  $\omega$ .

Требую в отношении функции  $\vartheta^{(2)}$  выполнения условия (5.9), получим для коэффициентов  $\vartheta_n^{(2)}$  разложения в ряд функции  $\vartheta^{(2)}$  уравнения вида (5.7), которые будут отличаться друг от друга для различных индексов  $n$  только видом правой части.

Если точка  $N(x, y, 0)$  расположена в полосе  $\delta_B$  (фиг. 59), то область интегрирования  $S$  в формуле (4.1) также пересекается с полосообразными областями  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N, \sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_N, \delta_1, \delta_2$  и, в отличие от предыдущего случая, пересекается с полосообразными областями  $\delta'_1$  и  $\delta_B$ . Всюду, за исключением области  $\delta_B$ , функция  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} e^{-i\omega t - \beta \frac{x+y}{a}}$  уже определена.

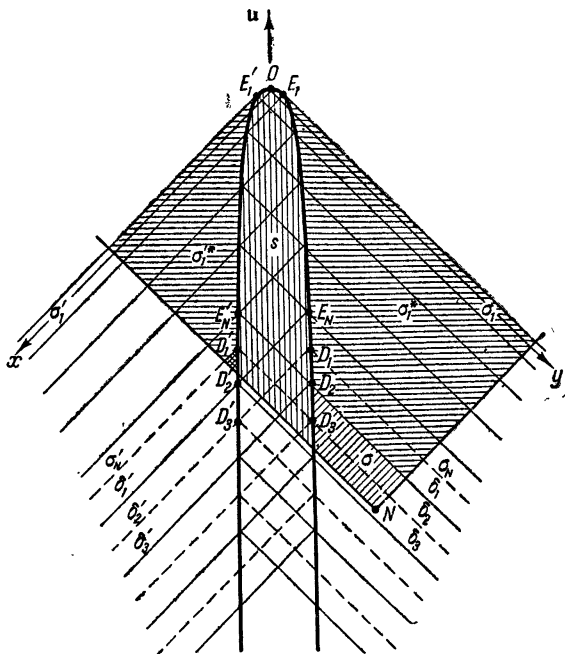
В области  $\delta_B$  эта функция является неизвестной; выше мы обозначили её через  $\vartheta^{(3)}$ . Отправляясь опять от краевых условий (1.10) и (1.12) гл. I, мы придём к интегродифференциальному уравнению, которому удовлетворяет функция  $\vartheta^{(3)}$  и которое снова отличается от уравнения (5.2) только видом правой части. Правая часть этого уравнения зависит теперь, с одной стороны, от решений  $\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \dots, \vartheta^{(N)}, \vartheta^{(2)}, \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \dots, \vartheta^{(N)}$  и, с другой стороны, от решений  $\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(1)}$ . Решение  $\vartheta^{(3)}$  найдём, используя условие (5.9), в виде ряда по степеням параметра  $\omega$ .

Таким же путём строится интегродифференциальное уравнение для функции  $\vartheta^{(n)}$  в полосе  $\delta_n$ . Функция  $\vartheta^{(n)}$  удовлетворяет уравнению вида (5.2) с правой частью, зависящей от функции  $\vartheta^{(m)}$  и  $\vartheta^{(m)}$  для  $m=1, 2, \dots, N$ , от функций  $\vartheta^{(r)}$  для  $r=1, 2, \dots, n-1$  и от функций  $\vartheta^{(r)}$  для  $r=1, 2, \dots, n-2$ . Таким образом, решение в области  $\delta_n$  зависит от решений в областях, расположенных от  $\delta_n$  вверх по потоку.

Решение для  $\vartheta^{(n)}$  строим в виде степенного ряда вида (5.4), абсолютно и равномерно сходящегося для всех значений параметра  $\omega$  и допускающего почленное дифференцирование по обоим переменным  $x$  и  $y$ . Коэффициент  $\vartheta_k^{(n)}$  в общем члене ряда для функций  $\vartheta^{(n)}$  находится посредством обращения уравнения вида (5.7), правая часть которого зависит от коэффициентов  $\vartheta_j^{(n)}$  для  $j \leq k-1$ , от коэффициентов  $\vartheta_j^{(1)}, \vartheta_j^{(2)}, \dots, \vartheta_j^{(n-1)}, \vartheta_j^{(1)}, \vartheta_j^{(2)}, \dots, \vartheta_j^{(n-2)}$  для  $j \leq k$  разложения в ряд функций  $\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \dots, \vartheta^{(n-1)}, \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \dots,$

$\vartheta^{(n-2)}$  и от коэффициентов  $\theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}, \dots, \theta_j^{(N)}, \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}, \dots, \theta_j^{(N)}$  для  $j \leq k$  разложения функций  $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(N)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(N)}$  в ряд по степеням параметра  $\omega$ .

Таким образом, последовательно строятся решения для производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  в областях, где сказывается влияние вихревой пелены, сбегаящей с поверхности крыла. После того



Фиг. 59.

как найдены значения производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  всюду в плоскости  $xu$ , потенциал скорости может быть вычислен по формуле (1.3) или (4.1) в любой точке пространства, возмущённого движением крыла, изображённого на фиг. 56 и 57, когда добавочные неустановившиеся движения крыла являются гармониче-



ных гладких кривых, заданных различными уравнениями, в частности, является кусочно-гладким, то число полосообразных областей типа  $\sigma_n$  и  $\delta_n$  с различным аналитическим характером решения для производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  увеличится за счёт угловых точек или точек сопряжения отдельных кривых, образующих контур крыла.

Изложенный метод определения производной  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$  посредством построения интегральных уравнений применим для крыла совершенно произвольного вида в плане. Например, контур крыла может не быть всюду выпуклым, а иметь вид, изображённый на фиг. 10, 16; крыло может иметь произвольные вырезы и т. п. Во всех случаях часть плоскости  $xu$ , где нужно определить производную  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$ , следует разбить на соответствующие характерные области. Затем, последовательно переходя вниз по потоку, от одной области к другой, строить интегральные или интегродифференциальные уравнения, используя краевые условия на плоскости  $xu$ . Решения этих уравнений строятся в рядах по степеням  $\omega$  частоты колебания крыла.

Задача определения коэффициентов разложения приводится к двумерному интегральному уравнению в каждой характерной области. Каждое из этих уравнений после некоторых преобразований приводится к интегральному уравнению одного и того же типа, сводящемуся к двум уравнениям Абеля с различными правыми частями для различных областей. При этом вид контура крыла сказывается на пределах интегрирования области определения искомой функции  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$ .

Влияние на рассматриваемую область определения искомой функции предыдущих характерных областей, расположенных вверх по потоку, отражается на виде правой части интегрального уравнения.

Выше мы рассмотрели движение изолированного крыла. Этот метод применим также к изучению обтекания хвостового оперения, бипланов-тандем, полипланов, расположенных определённым образом в потоке, и т. п. как при установившемся движении, так и при наличии добавочных колебательных движений крыльев.

### § 7. Обтекание колеблющегося крыла ненулевой толщины

Рассмотрим движение тонкого крыла с малым углом атаки (фиг. 28). Будем считать, что основное движение крыла состоит в прямолинейном поступательном движении с постоянной сверхзвуковой скоростью  $u$ . Пусть на основное движение крыла наложены малые добавочные колебательные движения, в которых поверхность крыла может деформироваться.

На верхней стороне поверхности крыла нормальную составляющую скорости будем считать заданной по закону

$$v_{nv} = A_{0v}(x, y) + \operatorname{Re} A_{2v}(x, y) e^{i\omega t} \quad (7.1)$$

и на нижней стороне по закону

$$v_{nh} = A_{0h}(x, y) + \operatorname{Re} A_{2h}(x, y) e^{i\omega t}, \quad (7.2)$$

где функции  $A_{0v}$  и  $A_{0h}$  определяют поверхность крыла, а функции  $A_{2v} = A_{1v}(x, y) \exp[i\alpha_v(x, y)]$  и  $A_{2h} = A_{1h}(x, y) \exp \times [i\alpha_h(x, y)]$  определяют амплитуду и начальную фазу добавочных колебательных движений крыла. Функции  $A_{0v}$ ,  $A_{1v}$  и  $\alpha_v$  будем считать заданными в каждой точке верхней поверхности крыла, а функции  $A_{0h}$ ,  $A_{1h}$  и  $\alpha_h$  будем считать заданными в каждой точке нижней поверхности крыла. Оси координат  $Oxyz$  определены в § 1 гл. I.

Потенциал скорости  $\varphi_n$ , происходящий от движения крыла с заданным профилем, представим в виде

$$\varphi_n(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, t) + \varphi_0(x, y, z, t). \quad (7.3)$$

Потенциал  $\varphi$  обусловлен движением некоторого колеблющегося крыла нулевой толщины, которое в каждый момент времени создаёт антисимметричный относительно плоскости  $xu$  поток (фиг. 26). Потенциал  $\varphi_0$  обусловлен движением некоторого тонкого колеблющегося крыла с симметричным относительно плоскости  $xu$  профилем. При этом колебательные движения происходят таким образом, что в каждый момент времени поверхность крыла сохраняет симметрию относительно этой плоскости (фиг. 27). Следовательно, такое крыло создаёт симметричный поток и функция  $\varphi_0$  удовлетворяет

условию

$$\varphi_0(x, y, -z, t) = \varphi_0(x, y, z, t). \quad (7.4)$$

Каждый из потенциалов  $\varphi$  и  $\varphi_0$ , в свою очередь, представим в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \quad (7.5)$$

и

$$\varphi_0 = \varphi_{00} + \varphi_{10}, \quad (7.6)$$

где потенциалы  $\varphi_0$  и  $\varphi_{00}$  соответствуют установившемуся движению крыльев, а потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_{10}$  — добавочным колебательным движениям крыльев.

Установим условия обтекания, пользуясь представлениями (7.3) для потенциалов скорости. Граничные условия на поверхности крыла перенесём параллельно оси  $Oz$  на проекцию  $\Sigma$  крыла на плоскость  $xu$  (фиг. 1). На основании заданных законов (7.1) и (7.2) получаем условия обтекания

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_{\Pi}}{\partial z} \right\}_{z=+0} = A_{0в}(x, y) + \operatorname{Re} A_{2в}(x, y) e^{i\omega t} \quad (7.7)$$

и

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_{\Pi}}{\partial z} \right\}_{z=-0} = A_{0н}(x, y) + \operatorname{Re} A_{2н}(x, y) e^{i\omega t}, \quad (7.8)$$

которые соответственно должны выполняться на верхней и нижней сторонах  $\Sigma$ .

Пользуясь представлениями (7.5) и (7.6), установим краевые условия для искоемых потенциалов  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_{00}$  и  $\varphi_{10}$ . Имея в виду, что в плоскости  $xu$  нормальные производные потенциалов  $\varphi_{00}$  и  $\varphi_{10}$ , обусловленные симметричным обтеканием крыла, удовлетворяют условиям:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial z} \right\}_{z=+0} &= - \left\{ \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial z} \right\}_{z=-0}, \\ \left\{ \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial z} \right\}_{z=+0} &= - \left\{ \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial z} \right\}_{z=-0}, \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

найдем для функций  $\varphi_{0c}$  и  $\varphi_{1c}$  краевые условия, которые должны выполняться на верхней стороне  $\Sigma$ , в виде

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_{0c}}{\partial z} \right\}_{z=+0} = \Gamma_0(x, y), \quad \left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}}{\partial z} \right\}_{z=+0} = \operatorname{Re} \Gamma_2(x, y) e^{i\omega t}, \quad (7.10)$$

где функции  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_2$  связаны с заданными на поверхности крыла величинами соотношениями

$$\Gamma_0 = \frac{A_{0в} - A_{0н}}{2}, \quad \Gamma_2 = \frac{A_{2в} - A_{2н}}{2}. \quad (7.11)$$

Условия, которые должны выполняться для функций  $\varphi_{0c}$  и  $\varphi_{1c}$  на нижней стороне  $\Sigma$ , имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \varphi_{0c}}{\partial z} \right\}_{z=-0} &= -\Gamma_0(x, y), \\ \left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}}{\partial z} \right\}_{z=-0} &= -\operatorname{Re} \Gamma_2(x, y) e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Так как в плоскости  $xu$  нормальные производные потенциалов  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , обусловленных антисимметричным обтеканием крыла, удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=+0} &= \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=-0}, \\ \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\}_{z=+0} &= \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\}_{z=-0}. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

краевые условия, которые должны выполняться одновременно на верхней и нижней сторонах  $\Sigma$ , установим в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} &= A_0(x, y), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \operatorname{Re} A_2(x, y) e^{i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

где функции  $A_0$  и  $A_2$  связаны с заданными на поверхности крыла величинами соотношениями

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{A_{0в} + A_{0н}}{2}, \\ A_2 &= \frac{A_{2в} + A_{2н}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Краевые задачи для функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  поставлены в § 1 гл. I, где в случае гармонических колебаний крыла вместо условий (1.6) на крыле следует взять условия (7.14). Решение краевой задачи для функции  $\varphi_0$  содержится в главе II; решение краевой задачи для функции  $\varphi_1$  содержится в настоящей главе.

Сформулируем краевые задачи для функций  $\varphi_{1c}$  и  $\varphi_{0c}$ .

I. Найти функцию  $\varphi_{1c}(x, y, z, t)$ , удовлетворяющую уравнению (1.4) гл. I, условию (1.11) гл. I на волне возмущения, условию (7.14) в плоской области  $\Sigma$  и условию

$$\frac{\partial \varphi_{1c}}{\partial z} = 0 \quad (7.16)$$

всюду в плоскости  $xu$  вне области  $\Sigma$ , где среда возмущена.

II. Найти функцию  $\varphi_{0c}(x, y, z)$ , удовлетворяющую уравнению (1.5) гл. I, условию (1.11) гл. I на волне возмущения, условию (7.14) в плоской области  $\Sigma$  и условию

$$\frac{\partial \varphi_{0c}}{\partial z} = 0 \quad (7.17)$$

всюду в плоскости  $xu$  вне области  $\Sigma$ , где среда возмущена.

Так как потенциалы  $\varphi_{1c}$  и  $\varphi_{0c}$  являются функциями, симметричными относительно плоскости  $xu$ , то достаточно решить задачи для верхнего полупространства.

Решение краевой задачи I, в частности, даёт формула (1.3). По этой формуле может быть вычислен потенциал скорости  $\varphi_{1c}$  всюду, так как в случае симметричного обтекания крыла для любой точки  $M(x, y, z)$  пространства в области интегрирования  $S$  производная  $\frac{\partial \varphi_{1c}}{\partial z}$  всюду является известной величиной.

На крыле производная  $\frac{\partial \varphi_{1c}}{\partial z}$  задана, а вне крыла эта производная равна нулю. При вычислении  $\varphi_{1c}$  в точке  $M$  по формуле (1.3) следует в ней вместо функции  $\left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\}_{z=0}$  подставить функцию  $\left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}}{\partial z} \right\}_{z=+0} = \text{Re } \Gamma_2(x, y) e^{i\omega t}$  и интегрирование распространить по части поверхности крыла, которая попадает внутрь характеристического конуса с вершиной в точке  $M$ ,

Решение краевой задачи II содержится в формуле (1.1) гл. II, если в ней вместо функции  $\left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right\}_{z=0}$  подставить функцию  $\left\{ \frac{\partial \varphi_{0c}}{\partial z} \right\}_{z=+0} = \Gamma_0(x, y)$  и интегрирование также распространить определённым выше образом. Эта задача подробно изложена в § 6 гл. II.

В частности, если крыло, профиль которого изображён на фиг. 28, колеблется как твёрдое тело, то функции  $A_{2в}$  и  $A_{2н}$  совпадают и, следовательно, функция  $\Gamma_2$  обращается тождественно в нуль. Для того чтобы в этом случае решить задачу обтекания, достаточно на антисимметричный поток, возбуждённый движением колеблющегося крыла с профилем нулевой толщины, наложить симметричный поток, обусловленный установившимся движением некоторого крыла с симметричным профилем.

---

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

«ГОСТЕХИЗДАТ»

Москва, Орликов пер., 3

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ

- Справочник по технической механике под редакцией акад. А. Н. Динника. Стр. 734. Цена 15 р. 75 к.
- Нейбер Г., Концентрация напряжений. Перевод с немецкого под редакцией профессора А. И. Лурье. Стр. 204. Цена 7 р. 80 к.
- Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Стр. 443. Цена 16 р. 30 к.
- Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике. Издание второе, дополненное. Стр. 195. Цена 8 р. 20 к.
- Соколовский В. В., Теория пластичности. Издание второе, переработанное и дополненное. Стр. 396. Цена 13 р. 15 к.
- Фабрикант Н. Я., Аэродинамика, ч. 1. Стр. 624. Цена 14 р. 50 к.
- Филоненко-Бородич М. М., Теория упругости. Издание 3-е, переработанное и значительно дополненное. Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебника для высших технических учебных заведений. Стр. 300. Цена 6 р. 80 к.
- Фрохт М. М., Фотоупругость, т. I. Перевод с английского М. Ф. Бокштейн, Ю. Ф. Красантовича и А. К. Прейсс, под редакцией проф. Н. И. Пригоровского. Стр. 432. Цена 18 руб.
- Фрохт М. М., Фотоупругость, т. II. Перевод с английского М. Ф. Бокштейн, Ю. Ф. Красантовича и А. К. Прейсс, под редакцией проф. Н. И. Пригоровского. Стр. 488. Цена 17 р. 10 к.
- Чаплыгин С. А., Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Стр. 102. Цена 3 р. 60 к.
- Чаплыгин С. А., О газовых струях. Стр. 143. Цена 5 р. 15 к.

Книги продаются в книжных магазинах и высылаются также почтой наложенным платежом без задатка всеми республиканскими, краевыми и областными отделениями

«КНИГА — ПОЧТОЙ».

Редактор *С. Н. Шустов.*  
Техн. редактор *Р. П. Остроумова.*  
Корректор *Л. О. Сечейко.*

---

Подписано к печати 16/VI 1952 г.  
Бумага 82×108/<sub>32</sub> 2,5 бум. л. 8,2 печ. л.  
8,0 уч.-изд. л. 39000 тип. зн. в печ. л.  
Т-02140. Тираж 5000 экз. Цена книги 4 р.  
Переплет 50 коп. Заказ № 3252.  
Номинал по прейскуранту 1952 года.

---

4-я типография им. Евг. Соколовой  
Главполиграфиздата  
при Совете Министров СССР.  
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Цена 4р. 50 к.

9542